

SÍLVIA HELENA SOARES SCHWAB

# **ANÁLISE DE FOURIER EM DETERMINAÇÕES COM O TEODOLITO GIROSCÓPIO**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas para a obtenção do grau de Mestre em Ciências pela Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Sílvio Rogério C. de Freitas

CURITIBA

1994

ANÁLISE DE FOURIER EM DETERMINAÇÕES  
COM O TEDOLITO GIROSCÓPIO

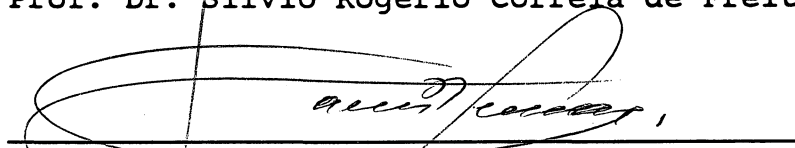
por

SÍLVIA HELENA SOARES SCHWAB

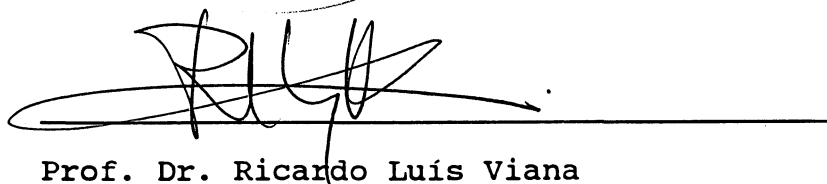
Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do grau de Mestre em Ciências no Curso de  
Pós-graduação em Ciências Geodésicas, pela comissão  
formada pelos professores



Prof. Dr. Sílvio Rogério Correia de Freitas



Prof. Dr. Camil Gemael



Prof. Dr. Ricardo Luís Viana

**ORIENTADOR**

**Sílvio Rogério Correia de Freitas**

- Doutor em Geofísica pela Universidade de São Paulo.
- Professor Adjunto do Departamento de Geociências do Setor de Tecnologia da UFPR.

**CO-ORIENTADOR**

**Carlos Aurélio Nadal**

- Mestre em Ciências pela Universidade Federal do Paraná.
- Professor Titular do Departamento de Geociências do Setor de Tecnologia da UFPR

A meus filhos

Ingrid, Livia e Guilherme



## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer às pessoas e instituições abaixo relacionadas que muito contribuíram para este trabalho.

Ao Prof. Dr. Sílvio Rogério Correia de Freitas pela orientação deste, pela atenção dispensada à solução de dúvidas e indicação de caminhos.

Ao Prof. MsC. Carlos Aurélio Nadal pela co-orientação deste trabalho na parte experimental.

Aos colegas professores do Departamento de Física da UFPR Sérgio Mauri Fabri e Wilson Alcântara Soares pelo auxílio na parte computacional.

Ao colega MsC Pedro Luís Faggion pelo apoio em todos os momentos durante a confecção deste trabalho.

Aos colegas do C.P.G.C.G. Darvin Edison Mog, Luciano Montenegro Pessoa e Simone Günther, que muito contribuíram com sugestões e apoio para este trabalho.

Aos Professores Marcos Lamar e Márlcio Bonfim do Departamento de Eletricidade da UFPR, e à Profª Márcia Lopes Quintas do Departamento de Geociências da UFPR, pelo auxílio na interpretação dos dados gerados na Análise de Fourier.

Ao Prof Jair Mendes Marques do Departamento de Estatística pelo auxílio na interpretação de resultados.

Ao meu marido Douglas pela compreensão.

Ao Departamento de Física da UFPR pela concessão de licença para a realização deste trabalho.

## SUMÁRIO

	Página
DEDICATÓRIA	iv
AGRADECIMENTOS	v
SUMÁRIO	vi
LISTA DE FIGURAS	xi
LISTA DE TABELAS	xiv
LISTA DE ABREVIATURAS	xvi
RESUMO	xix
ABSTRACT	xxi
INTRODUÇÃO	01

## CAPÍTULO I

### A MECÂNICA DO GIROSCÓPIO

1.1	Introdução	03
1.2	As Leis de Newton	04
1.3	Sistemas de referência inerciais	05
1.4	Movimento relativo de eixos	10
1.4.1	Introdução	10
1.4.2	Translação de eixos	10
1.4.3	Forças fictícias	13
1.4.4	Rotação de eixos	15
1.5	Dinâmica elementar dos corpos rígidos	27
1.5.1	Momento angular e torque sobre uma partícula de massa $M$	28
1.5.2	Equações de movimento de um corpo rígido girante	30
1.5.3	Energia cinética de rotação de um corpo rígido	34

1.5.4	As equações de Euler	36
1.5.5	Teoria fundamental do giroscópio	39
1.6	Influência da rotação da Terra	50

## CAPÍTULO II

### ELEMENTOS DA ANÁLISE DE FOURIER

2.1	Introdução	54
2.2	Transformada de Fourier	55
2.3	Potência do sinal	56
2.4	Transformada de Fourier aplicada a amostragens temporais	60
2.4.1	Introdução	60
2.4.2	Frequência crítica de Nyquist	60
2.4.3	Transformada Discreta de Fourier	62
2.4.4	"Aliasing e Smoothing"	64
2.5	Transformada Rápida de Fourier	68
2.5.1	Introdução	68
2.5.2	Algoritmo de Base 2 (Radix 2)	69
2.5.3	Pontos da análise de Fourier que serão aqui utilizados	70

## CAPÍTULO III

### O GIROTEODOLITO

3.1	Introdução	72
3.2	Histórico	74
3.3	Instalação e descrição dos componentes do giroteodolito	76
3.4	Operação do giroteodolito WILD GAK1	79

3.5	A pré-orientação do giroteodolito WILD GAK1	81
3.6	O Método das Passagens	84
3.6.1	Metodologia de coleta de dados e análise	84
3.6.2	Características do WILD GAK1 e exemplo de aplicação	90
3.6.3	Síntese do Método das Passagens	94
3.6.4	Análise crítica ao método	94
3.7	Método das Passagens Múltiplas	95
3.7.1	Introdução	95
3.7.2	Histórico comparativo de trabalhos sobre a Mecânica do Giroscópio	
3.7.3	Descrição sucinta dos procedimentos adotados por Jeudy no cálculo das equações de movimento do giroscópio	99
3.7.4	Síntese do método	108
3.7.5	Análise crítica ao método	109
3.8	O Método da Automação Parcial	110
3.8.1	Introdução	110
3.8.2	A tomada de medidas temporais	111
3.8.3	A análise dos dados	112

## CAPÍTULO IV

### A ANÁLISE DAS OBSERVAÇÕES

4.1	Introdução	115
4.2	Determinação do azimute giroscópico da mira pelo Método das Passagens utilizando-se um cronômetro manual	116
4.2.1	Dados obtidos	116
4.2.2	Cálculo do azimute giroscópico da mira	118
4.3	Determinação do azimute giroscópico da mira pelo Método das Passagens utilizando o relógio do microcomputador	

	como cronógrafo	119
4.3.1	Introdução	119
4.3.2	Dados obtidos	120
4.3.3	Análise dos dados	123
4.4	Cálculo do azimute da direção da mira por ajustamento polinomial de uma reta aos dados	126
4.4.1	Introdução	126
4.4.2	Considerações sobre o comportamento mecânico do instrumento	126
4.4.3	Ajuste polinomial de uma reta	127
4.4.3.1	Considerações sobre a transformação de unidades da escala auxiliar para minutos de arco	130
4.4.3.2	Cálculo do azimute da direção da mira pelo ajuste polinomial da reta ao conjunto de dados	132
4.5	Ajustamento dos dados no domínio no tempo	133
4.5.1	Introdução	133
4.5.2	Modelo matemático e ajustamento pelo método paramétrico	135
4.5.3	Análise dos resultados do ajustamento senoidal	140
4.5.3.1	Saída do programa de ajustamento	140
4.5.3.2	Análise estatística	140
4.5.3.3	Considerações sobre o tamanho das séries	142
4.5.4	Resultados obtidos no ajustamento senoidal	143
4.5.4.1	Estudo das séries pelo teste $\chi^2$	143
4.5.4.2	Valores ajustados de $\Delta N$ , $a$ , $b$ , $w$	147
4.5.4.3	Número de iterações	151
4.5.4.4	Tempo de tomada de medidas	152
4.5.4.5	Cálculo dos zeros da função ajustada	155
4.5.4.6	Cálculo do valor médio do período principal de oscilação	157

4.5.4.7	Propagação de erros	157
4.5.4.8	Cálculo do azimute da mira a partir dos valores de $\Delta N$ ajustados pelo modelo matemático senoidal	161
4.6	Análise de Fourier dos dados	164
4.6.1	Introdução	164
4.6.2	Interpolação e aplicação da Análise de Fourier	165
4.6.3	Análise dos resultados obtidos	167
4.6.3.1	Período principal de oscilação	167
4.6.3.2	Estudo da distribuição de energia	175
4.6.3.3	Estudo da energia associada aos resíduos	180

## CAPÍTULO V

### CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

5.1	Introdução	185
5.2	Análise crítica ao Método das Passagens com Automação Parcial	186
5.2.1	Vantagens do método	186
5.2.2	Considerações a respeito da cinta de suspensão	188
5.2.3	Considerações sobre resultados obtidos com grande número de séries	188
5.2.4	Processo de determinação do período principal do movimento giroscópico pelo MMQ	189
5.2.5	Propagação de erros para o azimute no ajustamento senoidal	190
5.2.6	Período do movimento oscilatório	190
5.2.7	Conclusões sobre a distribuição compartimentada de energia	193
5.2.8	Resultados finais de azimute da direção da mira	193
5.3	Recomendações	194

5.4	Encerramento	196
-----	--------------	-----

## APÊNDICES

APÊNDICE 1	198
APÊNDICE 2	205
APÊNDICE 3	222
APÊNDICE 4	223
APÊNDICE 5	225

## ANEXOS

ANEXO I	246
ANEXO II	259

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	294
----------------------------	-----

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 01 - Representação do movimento do ponto P em relação aos sistemas A e B.....	11
FIGURA 02 - $(X_r, Y_r, Z_r)$ gira com $w$ constante.....	15
FIGURA 03 - Mostra a rotação no plano.....	15
FIGURA 04 - Mostra as coordenadas do ponto P nos dois sistemas .....	16
FIGURA 05 - Mostra as relações entre coordenadas de P.....	16
FIGURA 06 - Movimento circular uniforme (no plano).....	20
FIGURA 07 - Movimento circular uniforme (no espaço).....	20
FIGURA 08 - Representação espacial da aceleração centrípeta...	21
FIGURA 09 - Sistema rotante gira com $w = \text{cte}$ .....	23
FIGURA 10 - Representação do vetor momento angular.....	29
FIGURA 11 - Representação do vetor torque.....	29
FIGURA 12 - Representação do vetor velocidade angular.....	41
FIGURA 13 - Representação do vetor momento angular no pião....	41
FIGURA 14 - Representação das forças que atuam no pião.....	42
FIGURA 15 - Representação da variação do vetor variação do momento angular.....	42
FIGURA 16 - Movimento de precessão do eixo.....	45
FIGURA 17 - Movimento de precessão e nutação do pião.....	45
FIGURA 18 - Mostra o sentido de precessão de um giroscópio....	47
FIGURA 19 - Giroscópio com dois graus de liberdade.....	48
FIGURA 20 - Giroscópio Universal.....	49
FIGURA 21 - Componentes de $w_r$ .....	51
FIGURA 22 - Velocidade angular do giroscópio .....	51
FIGURA 23 - Torque exercido pela Terra sobre o eixo.....	52
FIGURA 24 - Áreas sob o quadrado da função $g(t)$ .....	58



FIGURA 25 - Mesma área sob um espectro unilateral.....	58
FIGURA 26 - Mesma área sob um espectro bilateral.....	58
FIGURA 27 - O efeito do "aliasing".....	66
FIGURA 28 - Sinal periódico e seu espectro de potências.....	67
FIGURA 29 - Sinal e espectro filtrados das altas frequências..	67
FIGURA 30 - Corte transversal de um giroteodolito WILD GAK1...	77
FIGURA 31 - Marca central de referência.....	80
FIGURA 32 - Orientação rápida com dois pontos de elongação máxima.....	83
FIGURA 33 - Posições da marca de referência.....	85
FIGURA 34 - Representação esquemática das posições da marca de referência no Método das Passagens.....	88
FIGURA 35 - Croquis com as direções utilizadas na determinação de azimute da mira.....	91
FIGURA 36 - Diagrama mostrando a amplitude de trabalho.....	93
FIGURA 37 - Descrição sucinta dos procedimentos adotados por Jeudy no cálculo das equações de movimento do giroscópio.....	99
FIGURA 38 - Representação espacial do movimento giroscópico..	101
FIGURA 39 - Ajustamento polinomial de grau zero aos dados de uma série temporal obtida com giroteodolito...	128
FIGURA 40 - Amplitude do movimento senoidal em função do tempo.....	136
FIGURA 41 - Sinal senoidal da série SEC1.....	167
FIGURA 42 - Sinal dos resíduos da série SEC1.....	168
FIGURA 43 - Densidade de potência espectral da série SEC1....	170
FIGURA 44 - Densidade de potência espectral dos resíduos da SEC1.....	171
FIGURA 45 - Distribuição total de energia com o período.....	177
FIGURA 46 - Representa o ajustamento de um polinômio à distri- buição compartimentada de energia normalizada....	179

FIGURA 47 - Distribuição compartimentada de energia associada aos resíduos do ajustamento senoidal...	182
FIGURA 48 - Gráfico dos resíduos compartimentados normalizados e a tendência de comportamento deste.....	183

## LISTA DE TABELAS

TABELA 01	- Exemplo de cálculo de azimuth pelo Método das Passagens com uso de cronômetro manual.....	92
TABELA 02	- Resultados obtidos pelo Método das Passagens com o relógio interno do microcomputador como cronógrafo.....	122
TABELA 03	- Erro da determinação de azimuth para diferentes desvios percentuais dos $\Delta t_i$ .....	123
TABELA 04	- Frequência de ocorrência de azimuthes pelo método.....	124
TABELA 05	- Mostra os resultados do ajustamento polinomial de grau zero aos dados temporais das diversas séries.....	129
TABELA 06	- Azimuthes da direção da mira para as diversas séries.....	132
TABELA 07	- Valores referentes ao teste de $\chi^2$ .....	145
TABELA 08	- Apresenta os resultados dos parâmetros ajustados.....	147
TABELA 09	- Precisão interna dos parâmetros ajustados.....	149
TABELA 10	- Número de iterações nas diversas séries.....	151
TABELA 11	- Séries longas e o número de iterações.....	152
TABELA 12	- Mostra o tempo de aquisição de dados da série...	153
TABELA 13	- Mostra os valores de azimuth da mira pelo ajustamento.....	162
TABELA 14	- Tabela de frequências de azimuthes.....	162
TABELA 15	- Densidade de potência espectral nos diversos períodos.....	173
TABELA 16	- Valor do período principal de oscilação do giroscópio.....	174
TABELA 17	- Distribuição da densidade de potência espectral nos diversos períodos componentes do sinal complexo.....	176
TABELA 18	- Estatística correspondente ao ajustamento de um polinômio de grau 8 à distribuição de energia...	178

TABELA 19 - Estatística correspondente ao ajustamento de um polinômio de grau 8 à energia normalizada.....	178
TABELA 20 - Distribuição de energia nos resíduos compartimentados e normalizados com o período.....	181
TABELA 21 - Estatística dos resíduos ajustados.....	181
TABELA 22 - Estatística para o gráfico dos resíduos compartimentados normalizados.....	184

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\vec{R}$	Resultante de um sistema de forças.
$\vec{F}$	Vetor força.
$\vec{p}$	Vetor momento linear.
$M$	Massa de uma partícula.
$\vec{v}$	Vetor velocidade
$\vec{v}_{PA}$	Vetor velocidade do ponto P em relação ao referencial A.
$\vec{v}_{PB}$	Vetor velocidade do ponto P em relação ao referencial B.
$\vec{v}_{BA}$	Vetor velocidade do referencial B em relação ao referencial A.
$\vec{r}_{PA}$	Vetor posição do ponto P em relação ao referencial A.
$\vec{r}_{PB}$	Vetor posição do ponto P em relação ao referencial B.
$\vec{r}_{BA}$	Vetor posição do referencial B em relação ao referencial A.
$\vec{a} = \vec{a}_{PB}$	Vetor aceleração do ponto P em relação ao referencial B.
$\vec{a}_0 = \vec{a}_{PA}$	Vetor aceleração do ponto P em relação ao referencial A.
$\vec{v}_I$	Vetor velocidade de uma partícula em relação a um referencial inercial.
$\vec{F}_0$	Força fictícia.
$\vec{w}$	Vetor momento angular.
$\vec{v}$	Vetor velocidade tangencial de uma partícula em MCU.
$\theta$	Ângulo descrito num movimento de rotação.
$\vec{v}_R$	Vetor velocidade de uma partícula em relação a um referencial rotante.
$x_R, y_R, z_R$	Coordenadas de um ponto em relação a um sistema rotante.
$x_I, y_I, z_I$	Coordenadas de um ponto em relação a um referencial inercial.
$\dot{x}_I, \dot{y}_I, \dot{z}_I$	Componentes do vetor velocidade de uma partícula em relação a uma sistema inercial.

$\dot{x}_R, \dot{y}_R, \dot{z}_R$	Componentes do vetor velocidade de uma partícula em relação a um sistema rotante.
$\ddot{x}_I, \ddot{y}_I, \ddot{z}_I$	Componentes do vetor aceleração de uma partícula em relação a um referencial inercial.
$\ddot{x}_R, \ddot{y}_R, \ddot{z}_R$	Componentes do vetor aceleração de uma partícula em relação a um referencial rotante.
$\vec{a}_I = \ddot{\vec{r}}_I$	Vetor aceleração da partícula em relação a um referencial inercial.
$\vec{\rho}$	Vetor posição de uma partícula em relação a um sistema inercial.
$\vec{a}_c$	Vetor aceleração centrípeta.
$\vec{\alpha}$	Vetor aceleração angular.
$\vec{T}$	Vetor torque.
$M_n$	Massa da enésima partícula de um sistema.
$\vec{r}_n$	Vetor posição da enésima partícula de um sistema.
$L_x, L_y, L_z$	Componentes do vetor momento angular de um corpo.
$I_{xx}, I_{xy}, \dots$	Coeficientes de inércia.
$w_1, w_2, w_3$	Componentes do vetor velocidade angular $w$ segundo os eixos principais de inércia 1, 2 e 3.
$I_1, I_2, I_3$	Eixos principais de inércia.
$\vec{I}$	Tensor de inércia.
$\vec{\Omega}$	Vetor velocidade angular de precessão.
$\Omega_t$	Vetor velocidade angular total de um pião.
$\omega_{TH}$	Componente da velocidade angular da Terra segundo a meridiana.
$\omega_{TV}$	Componente da velocidade angular da Terra segundo a vertical.
$\vec{L}_g$	Vetor momento angular do giroscópio.
$w_g$	Vetor velocidade angular do giroscópio.

$\vec{L}_T$	Vetor momento angular da Terra.
$\vec{w}_T$	Vetor velocidade angular da Terra.
$I_g$	Momento de inércia do giroscópio em relação ao eixo de rotação.
$\hat{A}$	Ângulo formado entre a direção do eixo de rotação do giroscópio e a direção do eixo de rotação da Terra.
$\phi$	Latitude do giroscópio.
$N_g = N$	Norte giroscópico.
$N'$	Norte aproximado.
$L_m$	Leitura da mira.
$A_z$	Azimute da direção da mira.
$\Delta N$	Diferença de leitura entre o norte giroscópico e o norte aproximado.
$\vec{w}_c$	Velocidade angular do carter.

## RESUMO

O presente trabalho visa sistematizar os procedimentos e princípios ligados à determinação de azimutes giroscópicos nas aplicações geodésicas, com ênfase à aplicação do teodolito-giroscópio WILD GAK1.

Os princípios físicos da dinâmica de rotação são apresentados no capítulo I. Sua aplicação na mecânica de funcionamento do giroscópio, as equações de movimento deste e a influência da rotação da Terra sobre ele são estudados com o objetivo de permitir a compreensão dos resultados obtidos.

Os princípios da Análise de Fourier são trabalhados no capítulo II para o embasamento da análise espectral de frequências realizada a partir de dados obtidos com o instrumento.

No capítulo III descreve-se o giroteodolito WILD GAK1 e mostra-se os métodos tradicionais de leituras e cálculo de resultados, realizando-se uma análise dos dados obtidos neste trabalho dentro desta metodologia tradicional. Por outro lado descreve-se a metodologia adotada por Jeudy(1981) para o levantamento das séries temporais utilizando-se um processo completamente automatizado pela introdução de células fotoelétricas e conclusões sobre a precisão obtida.

Um novo método para determinação do azimute giroscópico da direção de um ponto foi desenvolvido utilizando-se o relógio interno de um microcomputador afim de registrar-se os instantes cronométricos das passagens do eixo de rotação do giroscópio por pontos da escala auxiliar do instrumento. Com isto é possível



levantar-se as séries temporais do movimento do eixo de rotação deste giroscópio com uma estimativa de precisão maior que a obtida pelos métodos tradicionais mas sem a necessidade de realizar modificações no instrumento, como as procedidas por Jeudy.

Embora esta estimativa de precisão utilizando-se este método seja inferior à obtida por Jeudy, mediante a inclusão de fotocélulas no interior da escala ligadas a cronógrafo, para o levantamento destas séries, a aplicabilidade do método é muito maior pois não é necessária a modificação do instrumento, mas apenas a programação e transporte de um microcomputador portátil juntamente com o instrumento para os pontos de observação. No capítulo IV este método é aplicado no levantamento de dados que são trabalhados no domínio do tempo e também realizando-se uma Análise de Fourier na busca de frequências correspondentes dos movimentos periódicos superpostos previstos teóricamente nos capítulos I e II.

No capítulo V são apresentadas as conclusões sobre os resultados obtidos com o método e comparações com os resultados obtidos pelo método tradicional de leituras e pelo método desenvolvido por JEUDY.

## ABSTRACT

The aim of this work is to systematize principles and procedures of giroscopic azimuth determinations in geodetic applications, emphasizing the application to WILD GAK1-Gyrotheodolite.

In chapter I the physical principles of dynamics are shown and applied to the gyroscope to obtain the equations of motion of the gyroscope, associated with the influence of the Earth's rotation on the instrument.

In chapter II the fundamentals of the Fourier analysis are presented in order to prepare the understanding of the Fourier analysis applied to the data in this work.

In chapter III the instrument is described and the traditional transit method of measurements is introduced, as well as a brief description of the Jeudy(1981) method of measurements and analysis. The objective is a comparison between the results obtained with the new method developed here. This new method of azimuthal determination introduces the internal clock of a microcomputer like a chronograph, aiming to register the time series of the motion. It is compared with the accuracy of the Jeudy(1981) method, where photocells were introduced in the instrument to register these series, and with the traditional transit method, where a chronometer is used to register the time transits. In chapter IV this method is used to work the data, and a Fourier analysis is performed, fostering conclusions about the method, presented in Chapter V.

## INTRODUÇÃO

A determinação de azimute de uma direção é uma operação cotidiana na Geodésia e na Topografia, mas apresenta dificuldades em locais com problemas de intervisibilidade, como por exemplo, dentro de túneis ou florestas densas.

Para auxiliar as determinações nestes casos, surgiu o giroteodolito que utiliza um giroscópio aliado a um teodolito para a determinação do Norte giroscópico. O emprego deste instrumento permite a determinação do azimute da direção do ponto sem a necessidade de utilização de cronômetros de grande precisão, sem a necessidade de tabelas de efemérides e seus cálculos adjacentes.

Um fato que deve ser sempre ressaltado é que o eixo do giroscópio aponta sempre para o Norte instantâneo da Terra e, portanto, não cabem reduções que seriam necessárias se o resultado final buscado fosse o Norte geográfico pois estas correções, como do movimento do polo por exemplo, na ordem de  $0,3''$  não fariam sentido frente ao nível de precisão oferecido pelo instrumento e à praticidade de utilização para a qual ele foi idealizado e construído.

Muitos métodos são tradicionalmente usados para este fim. Pode-se determinar este azimute giroscópico da direção de um ponto com precisão na ordem de  $30''$  pelo Método das Passagens, utilizando-se as leituras do limbo horizontal do teodolito e dos instantes cronométricos de passagem de uma marca de referência por pontos de uma escala auxiliar de leituras efetuadas num cronômetro manual.

Mas pretende-se neste trabalho mostrar um novo método de determinação deste azimute melhorando-se a precisão obtida pela utilização de um recurso adicional, hoje simples: um microcomputador. Com as leituras dos instantes cronométricos das passagens citadas anteriormente registradas, e utilizando-se o relógio interno do microcomputador, é possível aumentar-se a precisão, com um erro estimado na ordem de  $\pm 15''$  no azimute giroscópico. Além disso, o processamento dos dados temporais se torna muito mais fácil, rápido e acessível.

O instrumento utilizado na parte experimental deste trabalho é um giroteodolito WILD GAK1. Com o recurso adicional do computador portátil previamente programado levado ao campo, este instrumento tem ainda bastante a oferecer em termos de precisão na determinação de azimute nas condições adversas já descritas.

Paralelamente, pretende-se embasar teóricamente o trabalho reestudando os princípios físicos da dinâmica de rotação, com o objetivo de apresentar-se um resumo dos princípios e grandezas envolvidos no movimento de rotação, bem como mostrar algumas passagens intermediárias e condições simplificativas adotadas e que quase sempre geram dúvidas a quem estuda o movimento de rotação de corpos rígidos. São apresentados ainda os conceitos matemáticos fundamentais da Análise de Fourier, tão importante para o estudo de séries temporais. Assim, além de tornar este trabalho o mais auto-explicativo possível, pretende-se auxiliar futuros trabalhos que venham a ser realizados nesta área.

## CAPÍTULO I

### A MECÂNICA DO GIROSCÓPIO

#### 1.1 INTRODUÇÃO

Quando inicia-se o estudo dos princípios de funcionamento do teodolito-giroscópio, que é utilizado neste trabalho na parte experimental, uma das dificuldades encontradas é a ausência, na maioria dos trabalhos publicados a respeito, de considerações mais profundas sobre as expressões matemáticas e grandezas físicas utilizadas na concepção e operação do instrumento. Isto ocorre, porque o ponto de partida destes trabalhos normalmente são os manuais de operação dos instrumentos, que se destinam à utilização prática e não a explicações físicas pormenorizadas. Neles são mostrados habitualmente os métodos de leitura e de cálculos do azimute de direções de pontos, realizadas utilizando-se o instrumento. Para tentar suprir esta lacuna, portanto, busca-se neste capítulo realizar uma síntese dos princípios físicos ligados à dinâmica de rotação do giroscópio em estudo, bem como a dedução das expressões que, como mencionado acima, aparecem nos referidos manuais de operação. Considera-se este capítulo como fundamental para a compreensão do instrumento, tal que se possa buscar seu melhor emprego e compreender-se as principais fontes de erro nas suas aplicações.

## 1.2 AS LEIS DE NEWTON DO MOVIMENTO

As tres Leis de Newton são fundamentais no estudo da dinâmica de corpos e relacionam as forças ou causas do movimento, resultantes da ação direta ou à distância entre corpos, com o movimento conseqüente destes.

Até Galileu Galilei (1564-1642), acreditava-se que o estado natural de um corpo era o repouso e que o movimento só subsistiria mediante a aplicação de forças. Galileu concluiu que a força externa que atua sobre um corpo somente provoca variação em sua velocidade e que, para que este corpo permaneça em repouso ou em movimento com velocidade constante, em relação a um referencial inercial, não seria necessária a aplicação desta força externa. Este postulado tornou-se mais tarde a Primeira Lei de Newton:

1ª Lei : " Todo corpo permanece em repouso ou em movimento com velocidade constante se sobre ele não atuar nenhuma força externa, ou se a resultante das forças for nula." Isto é, quando o vetor aceleração  $a = 0$  ,

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = \vec{0} \quad (1)$$

2ª Lei : " A somatória das forças que atuam sobre um corpo de massa  $M$  é igual ao produto desta massa pela aceleração deste corpo."

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = M \vec{a} \quad (2)$$

3ª Lei : " A toda ação corresponde uma reação de igual valor porém em sentido contrário"; ou seja, sempre que dois corpos interagem, a força no segundo corpo devido ao primeiro é igual e oposta à força no primeiro corpo devido ao segundo.

$$\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21} \quad (3)$$

Existe uma limitação inerente à validade da 3ª Lei pois todos os sinais ou forças tem velocidade de propagação finita. Assim,  $F_{12}$  é igual e oposta a  $F_{21}$  quando ambas são medidas no mesmo instante.

As duas primeiras leis são válidas somente se observadas em sistemas de referências inerciais ou não acelerados (Galileanos), e as forças podem ser relacionadas com a vizinhança dos corpos (forças reais). No caso de estar-se num sistema de referência acelerado surgem automaticamente forças que são importantes em Física: as forças fictícias. Estas forças não estão relacionadas com uma vizinhança e serão estudadas posteriormente.

### 1.3 SISTEMAS DE REFERÊNCIA INERCIAIS

A lei fundamental da Mecânica Clássica é a 2ª Lei de Newton, que foi inicialmente expressa na forma:

$$\sum \vec{F} = \frac{d \vec{p}}{dt} \quad (4)$$

onde  $\vec{p}$  é o vetor momento linear de uma partícula de massa  $M$  e com velocidade instantânea  $\vec{v}$ , ou seja:

$$\vec{p} = M \vec{v} \quad (5)$$

mas como:

$$\vec{a} = \frac{d \vec{v}}{dt} \quad (6)$$

então observa-se que, para a massa  $M$  constante:

$$\vec{R} = \frac{d (M \vec{v})}{dt} = M \frac{d \vec{v}}{dt} = M \vec{a} \quad (7)$$

ou seja, a equação (4) é equivalente à equação (2) e pode-se definir de forma consistente a "força verdadeira" ou força real  $\vec{R} = \sum \vec{F}$  (Kittel, 1973).

Do ponto de vista físico, referencial é o conjunto de um ou mais eixos com orientação definida no espaço ao qual se associa uma escala apropriada de comprimento. A principal característica de um referencial inercial é que, em relação a ele, uma posição ou orientação no espaço podem ser definidas sem ambiguidade (Freitas, 1980).

As discussões sobre o estabelecimento de um sistema de referência inercial vêm desde Galileu e permanecem atuais até



nossos dias. Newton, ao formular suas leis, as referenciou em relação a um "espaço absoluto". Posteriormente é que construiu-se uma outra forma para a 2ª Lei de Newton, aplicável a um sistema de coordenadas com eixos fixos na superfície da Terra (Kittel, 1973). Mas tanto a eq. (2) quanto a eq. (4) estão referidas a um sistema de referência que está não acelerado, ou seja, inercial ou galileano.

Uma conclusão a que se chega quando avalia-se o conjunto das hipóteses que lastreiam a Mecânica Clássica é que elas funcionam muito bem dentro de nossas limitações em testar hipóteses relativísticas em Laboratório. Segundo (Kittel, 1973), considera-se que estas hipóteses que lastreiam a Mecânica Clássica devem considerar: a) O espaço Euclidiano; b) O espaço isotrópico; c) As Leis de Newton válidas num sistema inercial determinado por um observador na Terra, que leve em consideração somente a aceleração da Terra em torno de seu eixo e em sua órbita em torno do Sol; d) A Lei da Gravitação Universal, que diz haver uma força atrativa entre massas diretamente proporcional ao produto destas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa, deve ser válida. O problema que se apresenta sempre é então a definição do sistema inercial de referência, pois é necessária uma aceleração nula (velocidade constante) em sua definição, o que significa ausência de forças, ou aceleração nula medida em relação a um sistema de referência. Por outro lado, a ausência de forças só pode ser caracterizada por esta aceleração nula, num círculo vicioso e que só pode ser rompido mediante aproximações. O fato que auxilia na definição aproximada de sistemas de referência inerciais

é justamente o fato de que massas muito distantes estão relacionadas entre si por forças que atuam segundo o inverso do quadrado da distância, o que permite negligenciar-se algumas delas. Mas o estabelecimento de sistemas de referência inerciais é uma discussão fundamental não só para a Física quanto para a Geodésia.

No final do sec.(XIX), Ernst Mach concebeu como referencial inercial todo aquele que não é acelerado em relação às estrelas fixas. Como as estrelas se movimentam, e isto pode ser observado em intervalos de tempo na ordem de séculos, então este conceito básico é imperfeito. Atualmente, na construção do catálogo FK5 a definição de um sistema inercial ligado às estrelas onde se conhece os movimentos próprios, reduzidos a uma época J2000,0 utiliza como complemento os quasares distantes. Mach afirmou ainda que a inércia observada em um ponto é consequência de toda a matéria do Universo, sendo portanto, uma manifestação da natureza gravitacional preponderante nas forças que atuam no Universo.

Essas afirmativas foram endossadas por Albert Einstein, que também sintetizou as observações de Galileu de que as acelerações sofridas por qualquer corpo em um campo gravitacional independem da sua massa. Com isto, a massa inercial e a massa gravitacional são manifestações de um mesmo fenômeno . Este é o chamado "Princípio da Equivalência" que diz ser impossível distinguir entre a força inercial e a força gravitacional. Einstein definiu como referencial inercial aqueles em queda livre em relação ao campo gravitacional local, sendo este último consequência de toda a matéria próxima ou distante do Universo(Freitas,1980).

A Terra, dentro desta conceituação, supondo-se que seu movimento seja central em relação ao Sol, estaria portanto em queda livre no movimento orbital. Porém, o campo gravitacional próximo à superfície da Terra varia pontualmente e com o tempo, de modo que este fato, isoladamente, coloca dúvidas quanto ao movimento de queda livre referido anteriormente. Um dispositivo inercial na Terra, estaria sujeito a um campo gravitacional não uniforme e não estacionário, a uma contínua rotação em conjunto com a Terra e a uma série de outras perturbações (Blais, 1977).

Apesar disto, pontos sobre a superfície da Terra são utilizados para muitos fins como característicos de um sistema de referência inercial. Mas, devido ao fato de a Terra sofrer rotação, translação, aceleração na direção do centro da galáxia, etc, em trabalhos de maior precisão, um sistema de referência preso à sua superfície não pode ser considerado como inercial.

Neste trabalho, especificamente, consideraremos um sistema de referência com origem no centro de massa da Terra e direções dirigidas para as estrelas fixas como inercial. O instrumento, ligado à superfície da Terra, estará portanto num sistema de referência não inercial, que gira em relação ao sistema de referência inercial.

Em síntese, pode-se dizer que esta é uma discussão que continua em aberto e que um sistema de referência inercial é aquele no qual a eq.(2) é válida. Na prática, o sistema inercial é definido em função de um critério de precisão associado com esta mesma equação (Kittel, 1973). Num sistema de referência inercial as

forças que são postuladas para explicar o movimento de partículas, galáxias, etc, decrescem à medida que o corpo é afastado de seus vizinhos.

#### **1.4 MOVIMENTO RELATIVO DE EIXOS**

##### **1.4.1 Introdução**

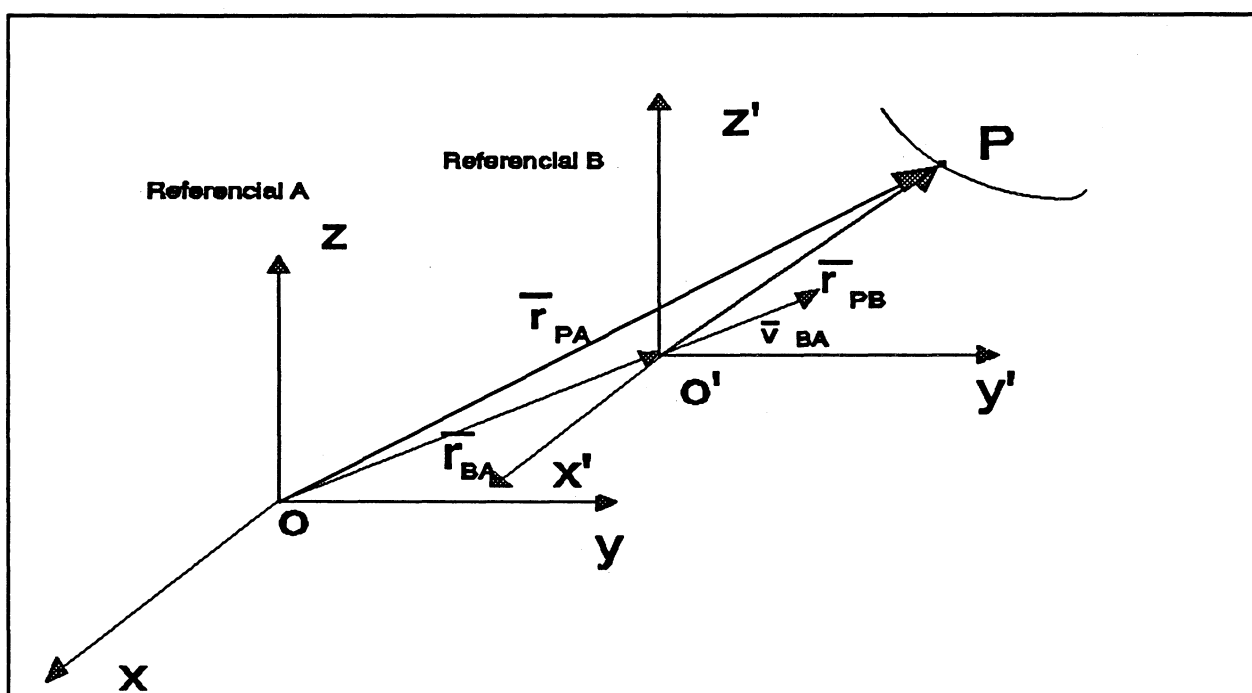
Uma preocupação que se deve ter é como o movimento de um corpo pode ser descrito. No caso de um corpo na superfície da Terra, é necessário aplicar-se os conceitos de translação de eixos e de rotação de eixos que porventura possam estar atrelados ao corpo e à Terra. Justifica-se assim relizar-se aqui esta análise, tendo em vista o estabelecimento das equações de movimento de qualquer corpo sobre sua superfície. A definição do que seja considerado um corpo rígido é, então, importante neste estudo. Entende-se por corpo rígido o conjunto de partículas cujas posições relativas, em um referencial atrelado ao corpo, são constantes. Exclui-se assim, neste estudo inicial, os casos onde o corpo se deforma ou vibra como resultado da rotação.

##### **1.4.2 Translação de eixos**

Supondo-se dois sistemas de referência A e B aos quais se associa um sistema de coordenadas, o sistema de referência A sendo considerado inercial. Um ponto P qualquer move-se com velocidade

variável  $\vec{v}_{PA}$  em relação ao referencial A e  $\vec{v}_{PB}$  em relação ao referencial B, cujos eixos são paralelos aos eixos de A e que está acelerado em relação a este, constituindo-se num sistema não inercial, conforme a fig.01; os eixos x e x' , y e y' e z e z' são respectivamente paralelos.

FIGURA 01 - REPRESENTAÇÃO DO MOVIMENTO DO PONTO P EM RELAÇÃO AOS SISTEMAS A E B



Portanto, o vetor posição do ponto P pode ser escrito como:

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA} \quad (8)$$

assim, derivando-se esta equação em relação ao tempo obtém-se as velocidades do ponto P em relação aos dois sistemas como:

$$\frac{d \vec{r}_{PA}}{dt} = \frac{d \vec{r}_{PB}}{dt} + \frac{d \vec{r}_{BA}}{dt} \quad (9)$$

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA} \quad (10)$$

onde  $\vec{v}_{PA}$  é a velocidade do ponto P em relação ao sistema inercial A,  $\vec{v}_{PB}$  é a velocidade do ponto P em relação ao sistema B, não inercial, e  $\vec{v}_{BA}$  é a velocidade do sistema não inercial B em relação ao sistema inercial A. Derivando-se novamente em relação ao tempo obtém-se as acelerações;

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} + \vec{a}_{BA} \quad (11)$$

onde  $\vec{a}_{PA}$  é a aceleração do ponto P em relação ao referencial A,  $\vec{a}_{PB}$  é a aceleração do ponto P em relação a B e  $\vec{a}_{BA}$  é a aceleração do referencial B em relação ao referencial A. Se, num caso particular, este referencial B se movesse com velocidade constante em relação a A, ou seja, se fossem ambos referenciais inerciais, então:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} \quad (12)$$

Isto significaria que observadores em ambos os referenciais mediriam a mesma aceleração para a partícula P móvel e,

$$\vec{F} = m \vec{a}_{PA} = m \vec{a}_{PB} \quad (13)$$

forneceria, em todos os sistemas de referência, a intensidade e a direção da força  $\vec{F}$  que atua sobre o ponto P, e que seria a mesma, independentemente das velocidades relativas dos sistemas de referência inerciais.

### 1.4.3 Forças Fictícias

Na eq.(2) se a aceleração de uma massa M situada no ponto P for medida em relação a um sistema de referência inercial como o sistema A, pode-se reescrevê-la da seguinte forma:

$$\vec{F} = M \vec{a}_I \quad (14)$$

de modo a enfatizar o caráter inercial da massa M, constante. Tendo-se um sistema não inercial, tal como a Terra em rotação, esta equação não é válida na forma acima descrita porque existe uma aceleração do referencial não inercial em relação ao inercial a ser considerada. Assim, da eq.(13) e da eq.(14) pode-se obter:

$$\vec{F} = M \vec{a}_{pA} = M \vec{a}_I \quad (15)$$

e utilizando-se a eq.(11), denominando  $\vec{a}_{BA} = \vec{a}_0$  e  $\vec{a}_{pB} = \vec{a}$  obtém-se a expressão:

$$\vec{F} = M ( \vec{a} + \vec{a}_0 ) \quad (16)$$

ou seja, realizando-se experiências num referencial não inercial, deve-se sempre incluir  $\vec{a}_0$  na equação de força.

Distribuindo-se a eq.(16) obtém-se:

$$\vec{F} - M \vec{a}_0 = M \vec{a} \text{ ou } \vec{F} + \vec{F}_0 = M \vec{a} \quad (17)$$

pois denominou-se  $(- M a_0)$  como  $F_0$ . Pode-se concluir que  $F_0$  é a força fictícia que é igual mas oposta ao produto da massa pela aceleração do referencial não inercial em relação ao inercial. Ela simplesmente representa o efeito do próprio sistema não inercial; é a quantidade que deve-se adicionar à força real  $F$  para fazer a soma igual a  $(M a)$  quando observada no sistema não inercial. Um exemplo simples é o da massa puntiforme  $M$  em repouso num sistema não inercial, de modo que neste sistema  $a = 0$ . Se o sistema de referência não inercial girar uniformemente em torno de um eixo fixo em relação a um sistema inercial, então  $a_0 = - \omega^2 R$  em relação ao sistema inercial, sendo  $R$  dirigido na direção do eixo à partícula. Esta é a conhecida expressão da aceleração centrípeta. A especificação de que no sistema não inercial  $a = 0$  leva, pela eq.(17) a  $F = - F_0 = M a_0 = - M \omega^2 R$ . A força fictícia  $F_0$ , neste exemplo, é chamada força centrífuga e vale  $F_0 = M \omega^2 R$ , sendo dirigida para fora do eixo. Ela é equilibrada, por exemplo, por uma força elástica de uma mola afim de produzir aceleração zero (a massa está em repouso) no sistema de referência não inercial girante. Na sequência, este aspecto será retomado no final do item 1.4.4 .



#### 1.4.4 Rotação de eixos

Considere-se agora o caso geral de um sistema de referência não inercial  $(o', X_R, Y_R, Z_R)$  que gira com velocidade angular  $w$  constante em torno do eixo  $Z$  de um referencial inercial  $(o, X_I, Y_I, Z_I)$ . O ângulo girado será consequentemente  $\theta = wt$ . Na fig.(02) representa-se espacialmente esta rotação; na fig.(03) mostra-se no plano  $XY$  esta rotação, sendo o eixo  $Z$  perpendicular a este plano.

FIGURA 02 -  $(X_R, Y_R, Z_R)$  GIRA  
COM  $w$  CONST.

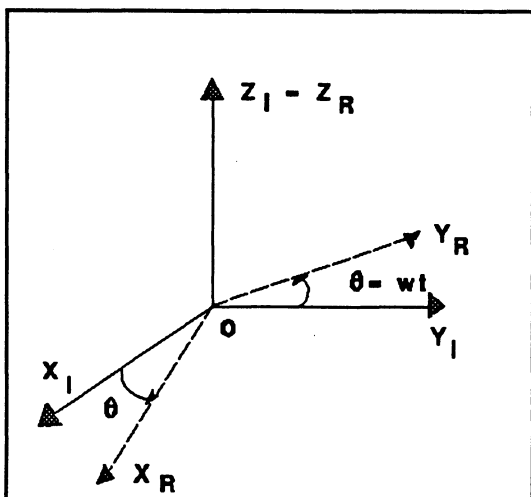
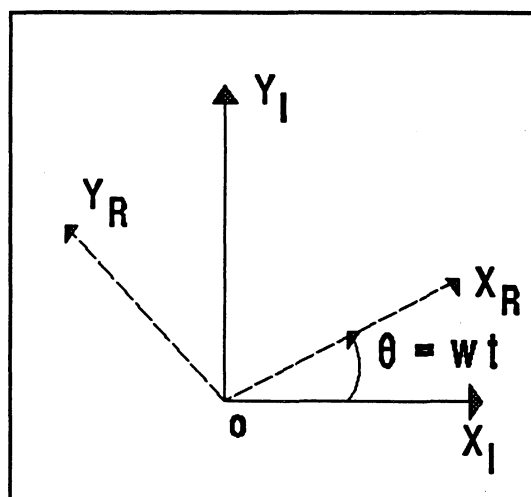


FIGURA 03 - MOSTRA ROTA-  
ÇÃO NO PLANO



Este problema é importante neste estudo porque todo sistema de eixos preso à superfície da Terra (topocêntrico) gira com ela com velocidade angular aproximadamente constante (sistema não inercial), em relação a um sistema de referência com origem no centro de massa da Terra o qual é considerado inercial

para este propósito, com as limitações já mencionadas.

As coordenadas  $(x_R, y_R, z_R)$  de um ponto P referidas ao sistema girante podem ser relacionadas de maneira simples com as coordenadas  $(x_I, y_I, z_I)$  do mesmo ponto P referidas ao sistema inercial.

FIGURA 04 - MOSTRA AS COORDENADAS DO PONTO P NOS DOIS SISTEMAS

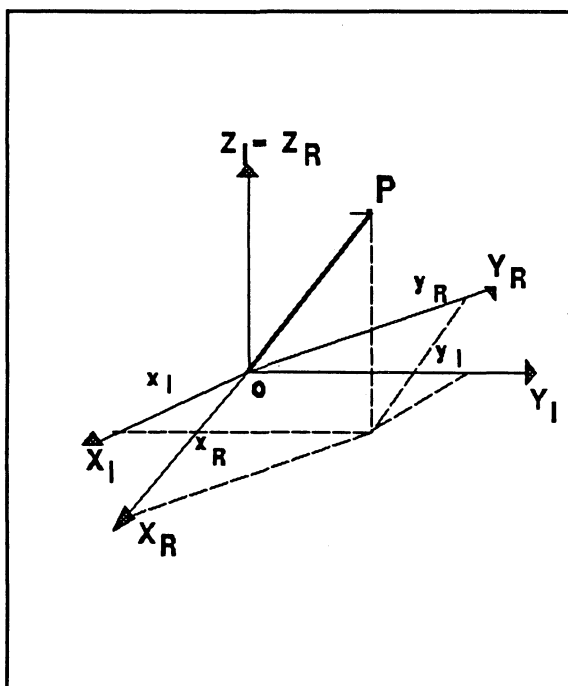
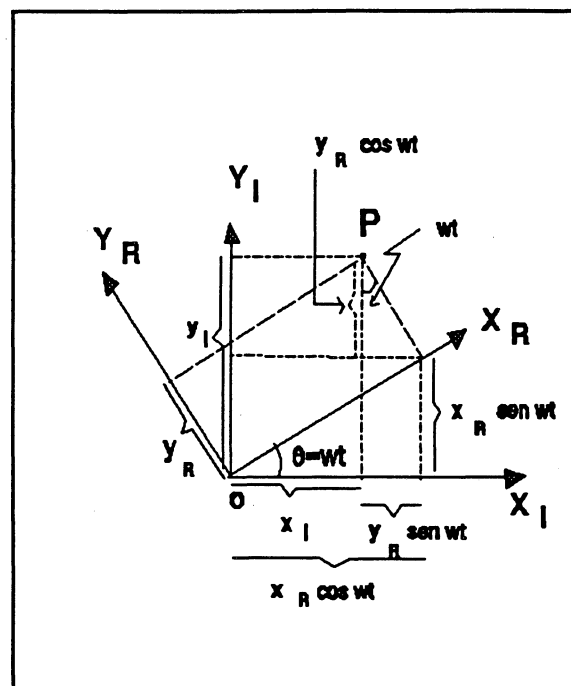


FIGURA 05 - MOSTRA AS RELAÇÕES ENTRE COORD. DE P



Das fig.(04) e (05) verifica-se que:

$$x_I = x_R \cos w t - y_R \operatorname{sen} w t \quad (18)$$

$$y_I = x_R \sin w t + y_R \cos w t \quad (19)$$

$$z_I = z_R \quad (20)$$

Observe-se novamente que o eixo  $z_I \equiv z_R$  é perpendicular ao plano. Derivando-se estas expressões obtém-se as velocidades.

$$\dot{x}_I = \frac{d x_I}{d t} = \dot{x}_R \cos w t - x_R w \sin w t - y_R w \cos w t - \dot{y}_R \sin w t \quad (21)$$

$$\dot{y}_I = \frac{d y_I}{d t} = \dot{x}_R \sin w t + x_R w \cos w t - y_R w \sin w t + \dot{y}_R \cos w t \quad (22)$$

$$\dot{z}_I = \frac{d z_I}{d t} = \dot{z}_R \quad (23)$$

Note-se que todas as derivadas primeiras em relação ao tempo foram denotadas utilizando-se um ponto sobre a variável e, de igual maneira, todas as derivadas segundas em relação ao tempo serão denotadas por dois pontos sobre a variável.

Um caso particular das expressões acima é o que a partícula está em repouso no sistema girante não inercial; assim:

$$\dot{x}_R = \dot{y}_R = \dot{z}_R = 0 \quad (24)$$

e as eq.(21), (22) e (23) se reduzem a:

$$\dot{x}_I = - x_R w \sin w t - y_R w \cos w t \quad (25)$$

$$\dot{y}_I = x_R w \cos wt - y_R w \sin wt \quad (26)$$

$$\dot{z}_I = 0 \quad (27)$$

Outro caso particular das eq.(21), (22) e (23) é aquele em que a partícula está em repouso em relação ao sistema inercial.

Neste caso:

$$\dot{x}_I = \dot{y}_I = \dot{z}_I = 0 \quad (28)$$

$$(\dot{x}_R - w y_R) = 0 ; (\dot{y}_R + w x_R) = 0 ; \dot{z}_R = 0 \quad (29)$$

Derivando-se novamente as eq.(21), (22) e (23), vem

$$\begin{aligned} \ddot{x}_I = \ddot{x}_R \cos wt - 2 w \dot{x}_R \sin wt - w^2 x_R \cos wt \\ - \ddot{y}_R \sin wt - 2 w \dot{y}_R \cos wt + w^2 y_R \sin wt , \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_I = \ddot{x}_R \sin wt + 2 w \dot{x}_R \cos wt - w^2 x_R \sin wt \\ + \ddot{y}_R \cos wt - 2 w \dot{y}_R \sin wt - w^2 y_R \cos wt \end{aligned} \quad (31)$$

e

$$\ddot{z}_I = \ddot{z}_R \quad (32)$$

No caso restrito de uma partícula em repouso no sistema girante não inercial,

$$\ddot{x}_I = -w^2 (x_R \cos wt - y_R \sin wt) = -w^2 x_I \quad (33)$$

$$\ddot{y}_I = -w^2 (x_R \sin wt + y_R \cos wt) = -w^2 y_I \quad (34)$$

e

$$\ddot{z}_I = 0 \quad (35)$$

as quais podem ser reescritas vetorialmente como:

$$\vec{a}_I = -w^2 \vec{p}_I \quad (36)$$

onde:

$$\vec{a}_I = \ddot{\vec{r}}_I \quad (37)$$

é a aceleração da partícula em relação ao sistema de referência inercial e onde:

$$\vec{a}_I = \ddot{x}_I \hat{x} + \ddot{y}_I \hat{y} + \ddot{z}_I \hat{z} \quad (38)$$

e

$$\vec{p}_I = x_I \hat{x} + y_I \hat{y} + z_I \hat{z} \quad (39)$$

sendo  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ , e  $\hat{z}$  os versores nas direções dos respectivos eixos.

A eq.(36) é a aceleração centrípeta . As eq.(30),(31) e (32) que possuem caráter geral, podem ainda ser sintetizadas. Para este procedimento é conveniente recordar-se alguns conceitos básicos, como a construção vetorial do movimento de corpos em rotação e que serão úteis posteriormente.

Inicialmente vai-se estabelecer as expressões para o movimento de um ponto P em movimento circular uniforme. Neste tipo de movimento, o raio R (fig.(06)) é constante e o vetor velocidade  $\vec{v}$  tem módulo constante e direção sempre tangente à trajetória. O vetor posição do ponto P é  $\vec{r}$ .

FIGURA 06 - MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME(NO PLANO)

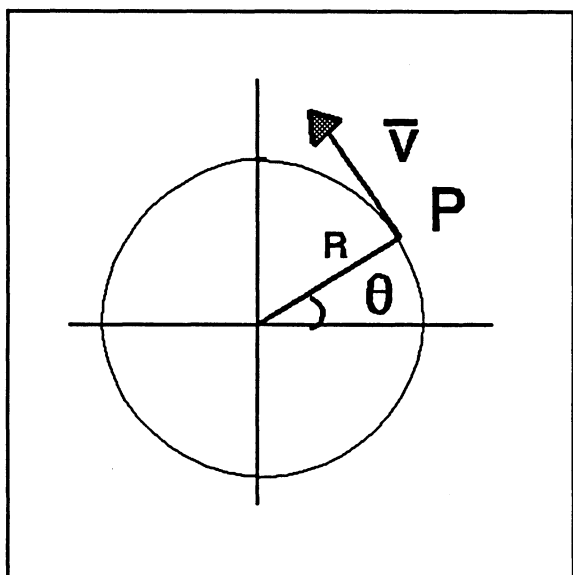
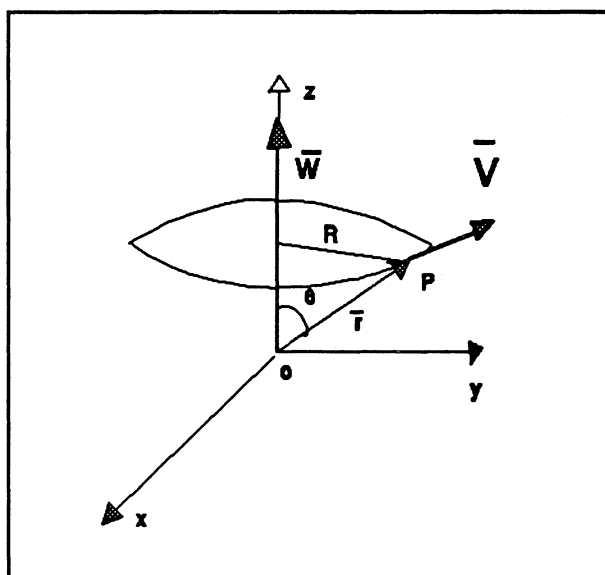


FIGURA 07 - MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME(NO ESPAÇO)



Uma vez que o vetor velocidade angular é  $\vec{w} = w\hat{z}$ .

Então:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (40)$$

fornece a velocidade tangencial indicada nas figuras, sendo  $\vec{\omega} = \text{cte.}$ .  
Portanto, o vetor aceleração angular  $\alpha = (d\vec{\omega})/dt = 0$ .

Isto significa que inexistirá a componente tangencial da aceleração  $\vec{a}$  e que a única componente presente será a aceleração centrípeta que surge da variação da direção do vetor velocidade.

Então:

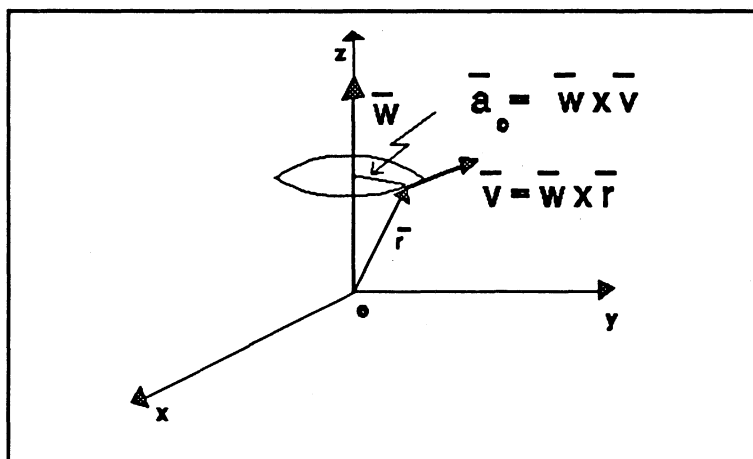
$$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (41)$$

como  $\vec{\omega} = \text{cte}$  e  $(d\vec{\omega})/dt = 0$ , obtém-se

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (42)$$

que é a expressão vetorial da aceleração centrípeta. Na fig.(08) representa-se estes vetores espacialmente.

FIGURA 08 - REPRESENTAÇÃO ESPACIAL DA  $\vec{a}_c$



No caso mais geral do vetor  $\vec{w}$  não ser constante, a eq.(42) torna-se:

$$\vec{a} = (\vec{\alpha} \times \vec{r}) + (\vec{w} \times \vec{v}) \quad (43)$$

onde  $\vec{\alpha}$  é o vetor aceleração angular. A expressão acima, pela eq.(41) pode ser expressa por:

$$\vec{a} = (\vec{\alpha} \times \vec{r}) + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) \quad (44)$$

O vetor aceleração angular neste caso tem direção situada sobre o eixo de rotação z pois:

$$\vec{w} = w \hat{z} = \frac{d\theta}{dt} \hat{z} = \dot{\theta} \hat{z} \quad (45)$$

onde  $\theta$  é o deslocamento angular (que é escalar) e, como

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{w}}{dt} = \ddot{\theta} \hat{z} \quad (46)$$

mostra-se a coincidência das direções.

Até este ponto estudou-se o movimento de rotação em torno de um eixo ( $Z_I = Z_R$ ) fixo em torno do qual gira o sistema. Porém, vai-se agora abordar um caso mais geral: um sistema de eixos  $(O, X_I, Y_I, Z_I)$ , inercial, em torno do qual gira um sistema  $(O', X_R, Y_R, Z_R)$ , não inercial, de tal modo que  $O \equiv O'$ , onde os dois eixos  $Z_I$  e  $Z_R$  não coincidem como anteriormente, mas o sistema rotante gira também com velocidade angular  $\vec{w}$  constante em torno do sistema inercial. Assim  $(dw/dt)=0$ . Supondo ainda que o sistema de eixos



rotante esteja fixo num corpo rígido e que P seja um ponto deste corpo. Então o seu vetor posição será:

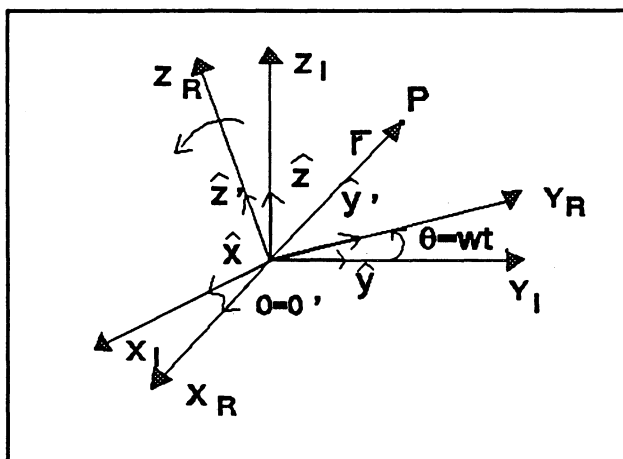
$$\vec{r} = \vec{r}_I = x_I \hat{x} + y_I \hat{y} + z_I \hat{z} \quad (47)$$

em relação ao sistema inercial e:

$$\vec{r} = \vec{r}_R = x_R \hat{x}' + y_R \hat{y}' + z_R \hat{z}' \quad (48)$$

em relação ao sistema girante, uma vez que as origens coincidem.

FIGURA 09 - SISTEMA ROTANTE GIRA COM  $\omega = \text{CTE.}$



A velocidade de P medida por um observador ligado ao sistema inercial será então:

$$\vec{v}_I = \frac{d\vec{r}_I}{dt} = \dot{x}_I \hat{x} + \dot{y}_I \hat{y} + \dot{z}_I \hat{z} \quad (49)$$

onde, como anteriormente:  $\dot{x}_I = dx_I/dt$ ;  $\dot{y}_I = dy_I/dt$ ;  $\dot{z}_I = dz_I/dt$ , pois, como este referencial não gira, os versores são constantes. Já os versores  $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ , variam no tempo. A velocidade de P medida por um observador ligado ao sistema  $(O', X_R, Y_R, Z_R)$ , a partir da eq. (48) será:

$$\frac{d \vec{r}_R}{dt} = [\dot{x}_R \hat{x}' + \dot{y}_R \hat{y}' + \dot{z}_R \hat{z}'] + [\dot{x}_R \frac{d \hat{x}'}{dt} + \dot{y}_R \frac{d \hat{y}'}{dt} + \dot{z}_R \frac{d \hat{z}'}{dt}] \quad (50)$$

É necessário, portanto, calcular as derivadas dos versores  $\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'$ . Como  $w$  é constante, as extremidades destes versores tem em relação a  $\hat{o} \equiv o'$  um movimento circular uniforme. Em outras palavras,  $(dx'/dt)$  é a velocidade de um ponto a uma distância unitária de  $\hat{o}$ , movendo-se com movimento circular uniforme. Assim, da eq.(40) obtém-se:

$$\frac{d \hat{x}'}{dt} = \vec{w} \times \hat{x}' ; \quad \frac{d \hat{y}'}{dt} = \vec{w} \times \hat{y}' ; \quad \frac{d \hat{z}'}{dt} = \vec{w} \times \hat{z}' \quad (51)$$

e na eq.(50) conclui-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d \vec{r}}{dt} = & [\dot{x}_R \hat{x}' + \dot{y}_R \hat{y}' + \dot{z}_R \hat{z}'] + \\ & \dot{x}_R (\vec{w} \times \hat{x}') + \dot{y}_R (\vec{w} \times \hat{y}') + \dot{z}_R (\vec{w} \times \hat{z}') \end{aligned} \quad (52)$$

$$= [\dot{x}_R \hat{x}' + \dot{y}_R \hat{y}' + \dot{z}_R \hat{z}'] + \vec{w} \times [\dot{x}_R \hat{x}' + \dot{y}_R \hat{y}' + \dot{z}_R \hat{z}'] \quad (53)$$

denotando-se:

$$\vec{V}_R = \dot{x}_R \hat{x}' + \dot{y}_R \hat{y}' + \dot{z}_R \hat{z}' \quad (54)$$

e como da eq.(48):

$$\vec{r}_R = x_R \hat{x}' + y_R \hat{y}' + z_R \hat{z}'$$

pode-se reescrever a eq.(53) como:

$$\vec{V}_I = \vec{V}_R + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (55)$$

pois como o vetor posição é o mesmo, apenas referenciado a dois sistemas diferentes,

$$\frac{d \vec{r}_R}{d t} = \frac{d \vec{r}_I}{d t} = \vec{V}_I \quad (55a)$$

Para obter-se as acelerações do ponto P em relação ao referencial  $(o, X_I, Y_I, Z_I)$  procede-se de modo semelhante:

$$\vec{a}_I = \frac{d \vec{V}_I}{d t} = \ddot{x}_R \hat{x} + \ddot{y}_R \hat{y} + \ddot{z}_R \hat{z} \quad (56)$$

e a aceleração em P em relação ao sistema  $(o', X_R, Y_R, Z_R)$  será:

$$\frac{d^2 \vec{r}_R}{d t^2} = \frac{d \vec{V}_R}{d t} + \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}_R)}{d t} \quad (57)$$

com o primeiro termo do segundo membro sendo:

$$\begin{aligned} \frac{d(\vec{V}_R)}{d t} &= [\ddot{x}_R \hat{x}' + \ddot{y}_R \hat{y}' + \ddot{z}_R \hat{z}'] + \\ &[ \dot{x}_R \frac{d \hat{x}'}{d t} + \dot{y}_R \frac{d \hat{y}'}{d t} + \dot{z}_R \frac{d \hat{z}'}{d t} ] \end{aligned} \quad (58)$$

e onde o primeiro colchete representa a aceleração do ponto P relativa a  $o'$ , ignorando-se a rotação de seu referencial. O segundo colchete, por um processo idêntico ao adotado nas eq.(52) e (53) será:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_R (\vec{\omega} \times \hat{x}') + \dot{y}_R (\vec{\omega} \times \hat{y}') + \dot{z}_R (\vec{\omega} \times \hat{z}') \\ &= \vec{\omega} \times (\dot{x}_R \hat{x}' + \dot{y}_R \hat{y}' + \dot{z}_R \hat{z}') \\ &= \vec{\omega} \times \vec{V}_R \end{aligned} \quad (59)$$

donde a eq.(58) pode ser escrita como:

$$\frac{d(\vec{v}_R)}{dt} = [\ddot{x}_R \hat{x}' + \ddot{y}_R \hat{y}' + \ddot{z}_R \hat{z}'] + \vec{\omega} \times \vec{v}_R \quad (60)$$

e, com esta na eq.(57) obtém-se:

$$= [\ddot{x}_R \hat{x}' + \ddot{y}_R \hat{y}' + \ddot{z}_R \hat{z}'] + (\vec{\omega} \times \vec{v}_R) + (\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_R}{dt}) \quad (61)$$

e, a partir da eq.(55a):

$$\frac{d\vec{r}_R}{dt} = \vec{v}_R + (\vec{\omega} \times \vec{r}_R) \quad (62)$$

obtem-se que a aceleração em relação ao sistema inercial, é então:

$$\begin{aligned} \vec{a}_I = [\ddot{x}_R \hat{x}' + \ddot{y}_R \hat{y}' + \ddot{z}_R \hat{z}'] + (\vec{\omega} \times \vec{v}_R) + \\ (\vec{\omega} \times \vec{v}_R) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned} \quad (63)$$

onde o termo entre colchetes é  $\vec{a}_R$ . Assim, a síntese da expressão da aceleração procurada é:

$$\vec{a}_I = \vec{a}_R + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_R) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (64)$$

com:  $\vec{a}_I$

é a aceleração no referencial inercial

$\vec{a}_R$  é a aceleração no referencial girante

$2(\vec{\omega} \times \vec{v}_R)$  é a aceleração de Coriolis

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R)$  é a aceleração centrípeta

As eq.(54) e (64) são importantes porque relacionam as observações num sistema girante com as observações num sistema inercial. Deve-se conhecer  $\vec{a}_I$  para aplicar-se a 2ª Lei de Newton. Todas as quantidades do lado direito da eq.(64) são observadas no

sistema girante. O primeiro termo  $\vec{a}_R$  é a aceleração como é observada no sistema girante; o termo  $2(\vec{\omega} \times \vec{v})$  é a aceleração de Coriolis e o terceiro termo,  $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$  é a aceleração centrípeta usual no movimento circular. Deve-se ter sempre presente que omitiu-se o termo :

$$\left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right) \times \vec{r} \quad (65)$$

que surgiria se a velocidade angular  $\vec{\omega}$  variasse com o tempo.

Portanto, a força fictícia  $F_0$  para a rotação com velocidade angular constante ( $\omega = \text{cte}$  e em portanto  $d\omega/dt = 0$ ) é dada por:

$$F_0 = -M \vec{a}_0 = -2M(\vec{\omega} \times \vec{v}_R) - M[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_R)] \quad (66)$$

onde o 1º termo do terceiro membro é a força de Coriolis e o 2º termo do terceiro membro é a força centrífuga. Esta é familiar no sentido em que é a única força que age numa partícula que está em repouso ( $\vec{v}_R = 0$ ) no sistema girante não inercial e, neste caso,

$$-M \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = M \omega^2 \vec{\rho} \quad (67)$$

como exemplificado no final do item anterior.

## 1.5 DINÂMICA ELEMENTAR DOS CORPOS RÍGIDOS

O problema dos corpos rígidos em movimento consiste em encontrar-se a solução de três equações diferenciais simultâneas

referentes às três componentes (cartesianas) da velocidade angular. Vai-se avaliar os resultados destas equações de movimento num sistema de referência fixo no corpo girante, em relação a um referencial inercial, no qual, por exemplo, o centro de massa do corpo esteja em repouso, porque esta situação se adapta ao mais acabado exemplo no estudo da dinâmica de um corpo rígido, que é o giroscópio. Para isto, novamente definições fundamentais devem ser aqui mencionadas para o entendimento de aproximações realizadas por diversos autores que serão aqui citados. Neste contexto, as definições do vetor torque e momento angular que atuam sobre partículas e, em extensão sobre corpos rígidos, são básicas.

#### 1.5.1 Momento angular e torque sobre uma partícula de massa $M$

O vetor momento angular  $\vec{L}$  de uma partícula em relação a uma origem arbitrária (fixa num sistema inercial) é definida como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times M \vec{v} \quad (68)$$

onde  $\vec{p} = M \vec{v}$  é o vetor momento linear da partícula. A componente do vetor momento angular  $\vec{L}$  ao longo de qualquer eixo que passa pelo ponto de referência (o) conforme a fig.10 é chamada momento angular da partícula em torno deste eixo. Como sua direção e sentido são dados por um produto vetorial, ele será sempre perpendicular ao plano formado pelos outros dois vetores, formando com estes um triedro dextrógiro. Embora tenha-se aqui escolhido na figura

utilizar-se o sistema cartesiano  $(o,x,y,z)$ , para representar os vetores, na realidade, eles podem ocupar qualquer posição no espaço e, portanto, o vetor momento angular também pode estar em qualquer posição, desde que resultante do produto vetorial acima.

FIGURA 10 - REPRESENTAÇÃO DO VETOR MOMENTO ANGULAR

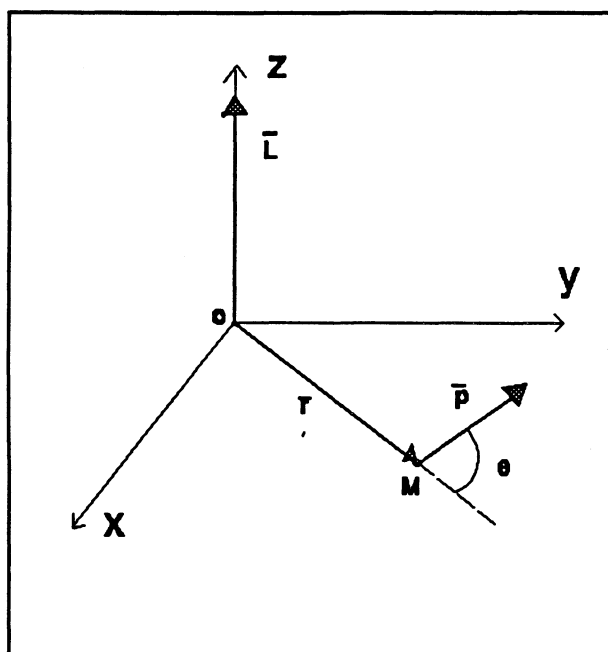
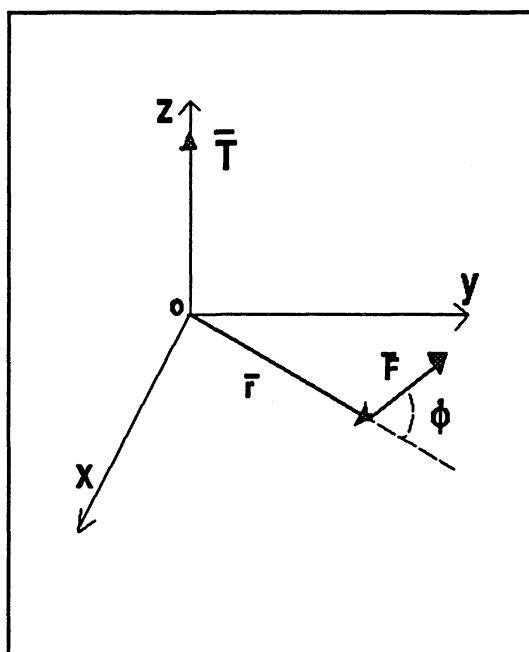


FIGURA 11 - REPRESENTAÇÃO DO VETOR TORQUE



Define-se também o vetor torque  $\vec{T}$  que atua sobre a partícula em torno deste mesmo ponto fixo, representado na fig.(11), a grandeza dada por:

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (69)$$

onde  $\vec{F}$  é a força que age sobre a partícula de massa  $M$  e  $\vec{r}$  é o vetor posição da partícula em relação ao ponto  $o$ .

Derivando-se a eq.(68) obtém-se um importante resultado:

$$\begin{aligned}\frac{d \vec{L}}{dt} &= \frac{d (\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \left( \frac{d \vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d \vec{p}}{dt} \right) \\ &= \vec{v} \times M \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}\end{aligned}\quad (70)$$

como  $\vec{v} \times M \vec{v} = 0$  e de acordo com a eq.(69), tem-se que:

$$\vec{T} = \frac{d \vec{L}}{dt} \quad (71)$$

ou seja, a taxa de variação temporal do momento angular é igual ao torque externo aplicado sobre a partícula.

### 1.5.2 Equações de movimento de um corpo girante

Considere-se agora um conjunto de  $n$  partículas em movimento de rotação em relação a um ponto comum (ligado a um sistema de referência inercial) e que usualmente será o centro de massa do sistema de partículas. Assim, tendo em vista a eq.(68), o vetor momento angular total do sistema de partículas pode ser representado por:



$$\vec{L} = \sum_n M_n (\vec{r}_n \times \vec{v}_n) \quad (72)$$

e,

$$\vec{T} = \sum_n \vec{r}_n \times \vec{F}_n \quad (73)$$

onde  $\vec{F}_n$  é a força externa que atua sobre a n-ésima partícula, de massa  $M_n$ . Se, ao invés de um sistema de partículas tiver-se um corpo rígido, a velocidade angular instantânea do corpo em torno de um eixo que passa por um ponto qualquer ( $w$ ) será dada por (Kittel, 1973) :

$$\vec{v}_n = \vec{w} \times \vec{r}_n \quad (74)$$

de modo que substituindo-se na eq.(72) vêm,

$$\vec{L} = \sum_n M \vec{r}_n \times (\vec{w} \times \vec{r}_n) \quad (75)$$

Como da análise vetorial sabe-se que:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (76)$$

a eq.(75) torna-se:

$$\vec{L} = \sum_n M_n [\vec{w} (\vec{r}_n \cdot \vec{r}_n) - \vec{r}_n (\vec{r}_n \cdot \vec{w})] \quad (77)$$

$$\vec{L} = \sum_n M_n [\vec{w} r_n^2 - \vec{r}_n (\vec{r}_n \cdot \vec{w})] \quad (78)$$

Como todas as partículas que compõem o corpo rígido

possuem a mesma velocidade angular em torno do eixo de rotação, pode-se reescrever a expressão acima em termos de suas componentes cartesianas  $w_x$ ,  $w_y$  e  $w_z$ . Assim:

$$\begin{aligned}
 L_x = & \left[ \sum_n M_n (r_n^2 - x_n^2) \right] w_x - \\
 & \left[ \sum_n M_n x_n y_n \right] w_y - \\
 & \left[ \sum_n M_n x_n z_n \right] w_z
 \end{aligned} \tag{79}$$

donde destaca-se:

$$\sum_n M_n (r_n^2 - x_n^2) = I_{xx} \tag{80}$$

$$- \sum_n M_n x_n y_n = I_{xy} \tag{81}$$

$$- \sum_n M_n x_n z_n = I_{xz} \tag{82}$$

Os coeficientes  $I_{xx}$ ,  $I_{xy}$  e  $I_{xz}$  são denominados de coeficientes inerciais ou coeficientes de inércia. Analogamente, para as componentes  $L_y$  e  $L_z$  do vetor momento angular obtém-se expressões semelhantes que relacionam os coeficientes de inércia à distribuição de massa do corpo e sua orientação instantânea em relação ao sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  que, até aqui foram considerados fixos num sistema de referência inercial e, por isto, elas dependerão do tempo. Assim, pode-se escrever as

componentes do vetor momento angular na seguinte forma:

$$L_x = I_{xx} w_x + I_{xy} w_y + I_{xz} w_z \quad (83)$$

$$L_y = I_{yx} w_x + I_{yy} w_y + I_{yz} w_z \quad (84)$$

$$L_z = I_{zx} w_x + I_{zy} w_y + I_{zz} w_z \quad (85)$$

A matriz de Inércia pode ser escrita na forma:

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (86)$$

onde os termos da diagonal principal são os momentos de inércia e os demais termos constituem os assim chamados produtos de inércia. A denominação de momento principal de inércia se deve, como pode-se observar na eq.(80) por exemplo, ao fato que, neste exemplo,  $I_{xx}$  é a soma dos produtos de cada massa pelo quadrado de sua distância ao eixo x; é portanto o momento principal de inércia em relação ao eixo x. O mesmo ocorre em relação aos outros eixos, y e z.

Se  $\rho(r)$  for a densidade num elemento de volume do corpo com vetor posição  $r$  em relação à origem do sistema de eixos, então pode-se reescrever os valores destes  $I$  definidos na eq.(80), (81) e (82) na forma integral:

$$I_{xx} = \int \rho(\vec{r}) (r^2 - x^2) dV \quad (87)$$

$$I_{xy} = - \int \rho(\vec{r}) x \cdot y \cdot dV \quad (88)$$

$$I_{xz} = - \int \rho(\vec{r}) x \cdot z \cdot dV \quad (89)$$

onde  $dV$  é o elemento de volume. Para isto utilizou-se o fato que a massa contida num elemento de volume  $dm$  é  $dm = \rho(r) dV$ , o que torna válida a passagem à forma integral realizada acima uma vez que na integração a massa contida no elemento de volume é estendida a todo o corpo.

### 1.5.3 Energia Cinética de rotação de um corpo rígido

A energia cinética de um corpo rígido, que gira em torno do seu centro de massa é dada por:

$$K = \frac{1}{2} \sum_n M_n v_n^2 = \frac{1}{2} \sum_n M_n (\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 \quad (90)$$

observe-se nesta última expressão que utilizou-se a eq.(74) e a igualdade  $(v_n)^2 = v_n^2$ . Deve-se observar ainda, da análise vetorial, que :

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}_n)^2 \equiv (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) \quad (91)$$

assim, na forma integral a eq.(90) torna-se:

$$K = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r}) (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dV \quad (92)$$

A forma geral da eq.(92), ou seja, a energia cinética de rotação para uma sistema arbitrário de eixos cartesianos será obtida a seguir. Para isto é necessário recordar-se uma outra igualdade fornecida pela análise vetorial que é:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

Assim:

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}_n) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_n) = \omega^2 r_n^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_n)^2 =$$

$$(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)(x_n^2 + y_n^2 + z_n^2) - (x_n \omega_x + y_n \omega_y + z_n \omega_z)^2 \quad (93)$$

logo, obtém-se:

$$K = \frac{1}{2} (\omega_x^2 I_{xx} + \omega_y^2 I_{yy} + \omega_z^2 I_{zz} + 2 \omega_x \omega_y I_{xy} + 2 \omega_y \omega_z I_{yz} + 2 \omega_z \omega_x I_{zx}) \quad (94)$$

que é a energia cinética de rotação do sistema. Esta expressão pode ser simplificada escolhendo-se um sistema de eixos apropriado, chamados eixos principais de inércia, onde ocorrem apenas os coeficientes diagonais. Denominando-se  $I_{xx} = I_1$ ,  $I_{yy} = I_2$  e  $I_{zz} = I_3$ , e como os produtos de inércia nesta caso se anulam (Kittel, 1973)

então:

$$K = \frac{1}{2} ( I_1 w_1^2 + I_2 w_2^2 + I_3 w_3^2 ) \quad (95)$$

#### 1.5.4 As Equações de Euler

A eq.(71) relaciona o vetor torque externo aplicado sobre uma partícula, ou sobre um sistema de partículas, ou ainda, sobre um corpo rígido, com a variação temporal do vetor momento angular. Ela é válida num sistema de referência inercial e constitui-se na principal equação de movimento de rotação deste corpo.

Por outro lado, os coeficientes inerciais são definidos em relação a um sistema de coordenadas em repouso no corpo girante, sendo este um sistema de referência não inercial.

A transformação do vetor momento angular de um referencial inercial para um girante é dada por (Goldstein,1980):

$$\left( \frac{d \vec{L}}{dt} \right)_I = \frac{d \vec{L}}{dt} + ( \vec{\omega} \times \vec{L} ) \quad (96)$$

onde  $\vec{\omega}$  é a velocidade angular do sistema girante. Todas as grandezas do segundo membro são observadas no sistema girante. Logo obtém-se, da eq.(71) que:

$$\left( \frac{d \vec{L}}{dt} \right)_I = \vec{\tau} \quad (97)$$

e portanto:

$$\mathcal{T} = \left( \frac{d \vec{L}}{dt} \right)_{NI} + ( \vec{\omega} \times \vec{L} )_{NI} \quad (98)$$

onde o sub-índice NI foi utilizado para ressaltar o caráter não inercial das observações feitas no sistema girante.

Supondo-se que os eixos cartesianos do sistema girante coincidam com os eixos principais 1,2 e 3. Então, de acordo com as eq.(83), (84), e (85) obtém-se:

$$\begin{aligned} L_x &= L_1 = I_1 \omega_1 \\ L_y &= L_2 = I_2 \omega_2 \\ L_z &= L_3 = I_3 \omega_3 \end{aligned} \quad (99)$$

Assim, na (98), a componente segundo a direção 1 será:

$$\mathcal{T} = \left[ \frac{d \vec{L}}{dt} \right]_1 + ( \vec{\omega} \times \vec{L} )_1 \quad (100)$$

como,

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega_1 \hat{x} + \omega_2 \hat{y} + \omega_3 \hat{z} \\ \vec{L} &= L_1 \hat{x} + L_2 \hat{y} + L_3 \hat{z} \end{aligned} \quad (101)$$

então ,

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{L} &= ( \omega_2 L_3 - L_2 \omega_3 ) \hat{x} + \\ & ( \omega_3 L_1 - \omega_1 L_3 ) \hat{y} + \\ & ( \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1 ) \hat{z} \end{aligned} \quad (102)$$

Assim, usando-se a (100) e a (102), vêm:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \left[ \frac{d L_1}{d t} \right] + (w_2 L_3 - w_3 L_2) \\
 T_1 &= I_1 \frac{d w_1}{d t} + (w_2 L_3 - w_3 L_2)
 \end{aligned}
 \tag{103}$$

e de igual forma:

$$\begin{aligned}
 T_2 &= I_2 \frac{d w_2}{d t} + (w_3 L_1 - w_1 L_3) \\
 T_3 &= I_3 \frac{d w_3}{d t} + (w_1 L_2 - w_2 L_1)
 \end{aligned}
 \tag{104}$$

de modo que, usando-se novamente as eq.(99), obtém-se as equações conhecidas como Equações de Euler, as quais são fundamentais para o estudo completo do movimento de corpos girantes. Essencial também é lembrar-se que os eixos principais 1,2 e 3 estão fixos no corpo, tal que:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= I_1 \frac{d w_1}{d t} + (I_3 - I_2) w_2 w_3 \\
 T_2 &= I_2 \frac{d w_2}{d t} + (I_1 - I_3) w_1 w_3 \\
 T_3 &= I_3 \frac{d w_3}{d t} + (I_2 - I_1) w_1 w_2
 \end{aligned}
 \tag{105}$$

Note-se ainda que a energia cinética neste caso onde os eixos cartesianos são levados a coincidirem com os eixos principais de inércia , torna-se, de acordo com a eq.(95) e com a eq.(99):

$$K = \frac{1}{2I_1} L_1^2 + \frac{1}{2I_2} L_2^2 + \frac{1}{2I_3} L_3^2
 \tag{106}$$



### 1.5.5 Teoria Fundamental do Giroscópio

Supondo-se que os eixos cartesianos do sistema girante coincidam com os eixos principais de inércia, e utilizando-se as eq.(99) e eq.(101), pode-se escrever que:

$$\vec{L} = I_1 w_1 \hat{x} + I_2 w_2 \hat{y} + I_3 w_3 \hat{z} \quad (107)$$

ou,

$$\vec{L} = \tilde{I} \cdot \vec{w} \quad (108)$$

onde  $\vec{w}$  é o vetor velocidade angular do corpo e  $\tilde{I}$  é o tensor de inércia dado por:

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (109)$$

Se, num caso particular, o corpo rígido tiver somente um eixo principal de inércia, então o vetor momento angular  $\vec{L}$  será sempre paralelo ao vetor velocidade angular  $\vec{w}$ , e  $I$  será o momento de inércia do corpo em relação a este eixo principal de inércia. De acordo com a eq.(71), se nenhum torque externo ( $T = 0$ ) atuar sobre este corpo, sua velocidade angular de rotação permanecerá constante, pois seu vetor momento angular será constante. Matematicamente, este fato é expresso por:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \rightarrow \vec{L} = I \vec{\omega} = \text{cte} \quad (110)$$

Esta ausência de variação do vetor momento angular caracteriza a Lei de Conservação do Momento Angular e possibilita a um rotor na presença de torques externos muito pequenos e que tenha grande velocidade angular, como por exemplo um giroscópio, girar com um momento angular quase constante, o que permite materializar quase perfeitamente uma direção no espaço com pequena deriva temporal. No giroscópio sobre a superfície da Terra, entretanto, não é possível deixar de levar em conta o torque externo produzido pela força de atração gravitacional. Devido a isto, é interessante iniciar-se este estudo pela análise do movimento do pião simétrico, que é um giroscópio elementar. Ele pode ser considerado como girando com velocidade angular de módulo igual a  $\omega$ , estando o vetor velocidade angular com sua direção caracterizada sobre o eixo de rotação e sentido dado pelo acompanhamento do sentido de rotação: se o sentido de giro for anti-horário, o sentido do vetor  $\omega$  será para cima do plano do disco mostrado na fig.(12); em caso contrário, ou seja, se o acompanhamento do sentido de rotação resultar num movimento horário, então a direção do vetor  $\omega$  será perpendicular ao plano do disco, sobre o eixo de rotação, e sentido para baixo deste plano. O vetor momento angular do pião está representado na fig(13).

FIGURA 12 - REPRESENTAÇÃO DO  
VETOR  $\vec{W}$

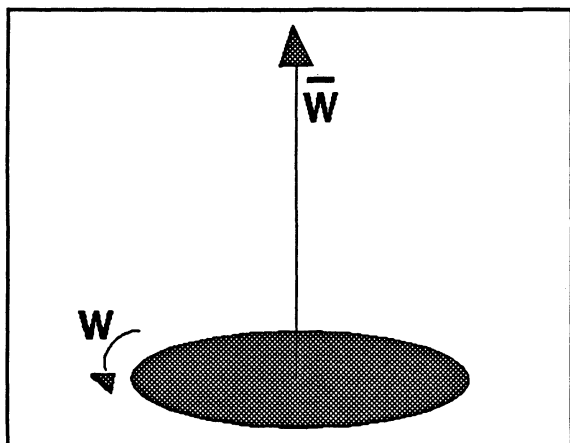
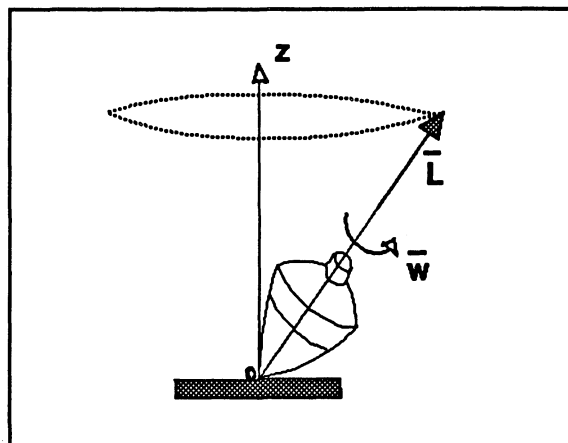


FIGURA 13 - REPRESENTAÇÃO DO  
VETOR  $\vec{L}$  NO PIÃO



A força peso que atua sobre todos os elementos de massa do pião pode ser aplicada no centro de gravidade do corpo, e considera-se não haver variação da aceleração da gravidade no interior do pião, este ponto pode ser considerado coincidente com o centro de massa do pião. Esta força peso realiza um torque externo sobre o pião em torno do ponto  $o$ , causando um movimento de precessão em torno deste ponto dado, de acordo com a eq.(69), por:

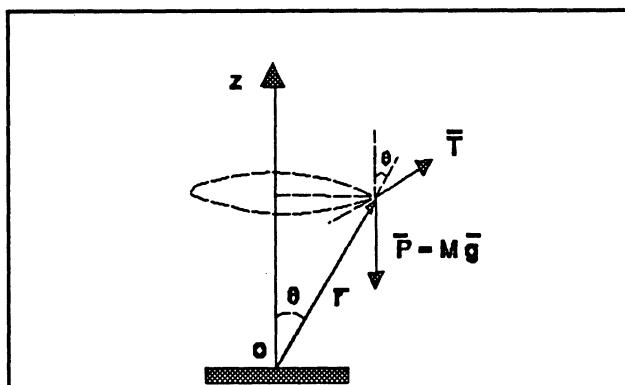
$$\vec{T} = \vec{r} \times M \vec{g} \quad (111)$$

uma vez que a força atuante é a força peso  $\vec{P} = M \vec{g}$ . Realizando-se o produto vetorial, o módulo do vetor torque será:

$$T = r M g \sin \theta \quad (112)$$

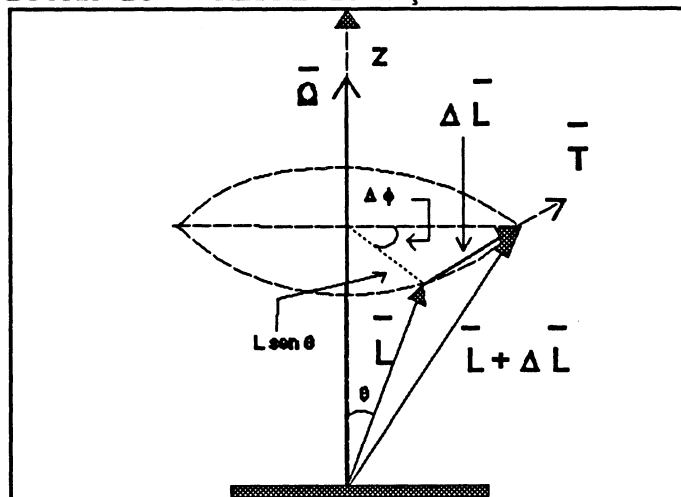
e a direção e sentido estão mostrados na fig.(14), pelo produto vetorial já descritas anteriormente.

FIGURA 14 - REPRESENTAÇÃO VETORIAL DAS FORÇAS QUE ATUAM NO PIÃO



Este torque externo causa uma variação no vetor momento angular do pião, que é dado pela eq.(71), ou seja,  $T = (\Delta L / \Delta t)$ . Deve-se ter sempre presente que, de acordo com a eq.(108), o valor de  $L = I \omega$ . A fig.15, a seguir, mostra estes vetores.

FIGURA 15 - REPRESENTAÇÃO DO VETOR  $\Delta L$



O vetor  $\Delta \vec{L}$  tem, portanto, a mesma direção e sentido do vetor torque  $T$ . Em módulo:

$$\begin{aligned} \Delta L &= T \Delta t \\ &= M g r \sin \theta \Delta t \end{aligned} \quad (113)$$

Devido ao fato do vetor  $T$  formar um ângulo de  $90^\circ$  com o vetor momento angular  $L$ , o torque externo não pode alterar seu módulo, mas apenas a sua direção. A fig(15) mostra a posição espacial do vetor  $\Delta L$ . Da figura pode-se ver ainda que:

$$\Delta L = L \sin \theta \Delta \phi \quad (114)$$

portanto, substituindo-se a eq.(113) na eq.(114), vem:

$$\Delta \phi = \frac{M g r \Delta t}{L} \quad (115)$$

definindo-se a velocidade angular de precessão (em módulo) como:

$$\Omega = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \quad (116)$$

então,

$$\Omega = \frac{M g r}{L} = \frac{M g r}{I \omega} \quad (117)$$

uma vez que  $L = I \vec{\omega}$  é o módulo do vetor momento angular do pião.

Observando-se ainda a fig.(15) pode-se ver a direção e o sentido do vetor velocidade angular de precessão, uma vez que da eq.(114), dividida pelo intervalo de tempo  $\Delta t$ , pode-se obter:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = L \sin \theta \frac{\Delta \phi}{\Delta t} =$$

$$T = L \sin \theta \Omega \quad (118)$$

o que equivale a dizer que, vetorialmente:

$$\vec{T} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (119)$$

A velocidade angular total do pião em relação a um referencial topocêntrico será dado pela soma vetorial:

$$\vec{\Omega}_t = \vec{\omega} + \vec{\Omega} \quad (120)$$

onde  $\vec{\omega}$  é a velocidade angular do pião e  $\vec{\Omega}$  é a velocidade angular de precessão do pião. Entretanto, se esta for muito lenta, ou seja,  $\Omega$  for muito menor que  $\omega$ , os resultados fornecidos pelas eq.(118) e eq.(119), embora aproximados, podem ser assumidos como representativos do movimento total de precessão.

Alonso & Finn(1972), em uma discussão mais detalhada indica que, em geral, o ângulo  $\theta$  não permanece constante, mas

oscila entre dois valores fixos, de tal modo que a extremidade do vetor momento angular  $L$  do pião, ao mesmo tempo que precessiona em redor do eixo  $z$ , oscila entre dois círculos  $C$  e  $C'$  (ver fig(17)), descrevendo um movimento oscilatório denominado nutação. A nutação, como a precessão, contribui para o momento angular total ( $\Omega_t$ ), mas, em geral esta contribuição é menor que a da precessão, sendo por isto muitas vezes desprezada. Ao contrário da precessão, ela não precisa da atuação de um torque externo para sua manutenção, pois representa uma transferência temporária de energia mecânica (Deimel, 1950). Entretanto, a existência de oscilações de alta frequência, percebida em leituras com o giroscópio, podem ser encaradas como consequência da nutação, ou seja, deste processo rápido de transferência de energia. Torna-se claro neste momento que, estes conceitos aqui mostrados como válidos para o pião simétrico, de igual maneira são válidos para o giroscópio. Assim, uma vez que neste estudo busca-se um aumento na precisão de medidas, os efeitos mencionados de precessão e nutação terão que ser considerados.

FIGURA 16 - MOVIMENTO DE PRE-  
CESSÃO DO EIXO

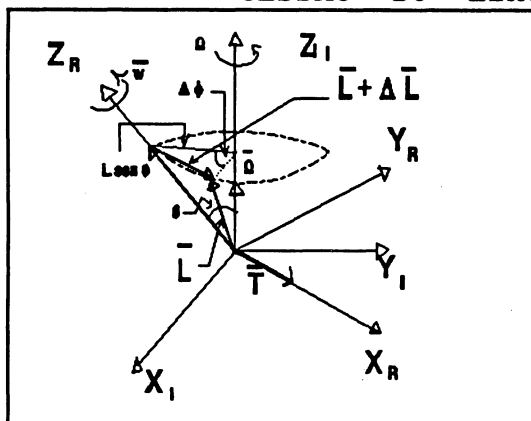
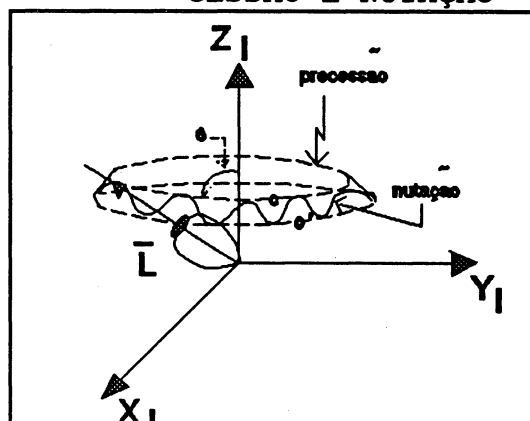


FIGURA 17 - MOVIMENTO DE PRE-  
CESSÃO E NUTAÇÃO



Todos estes princípios aplicados ao pião simétrico, são válidos igualmente no movimento giroscópico.

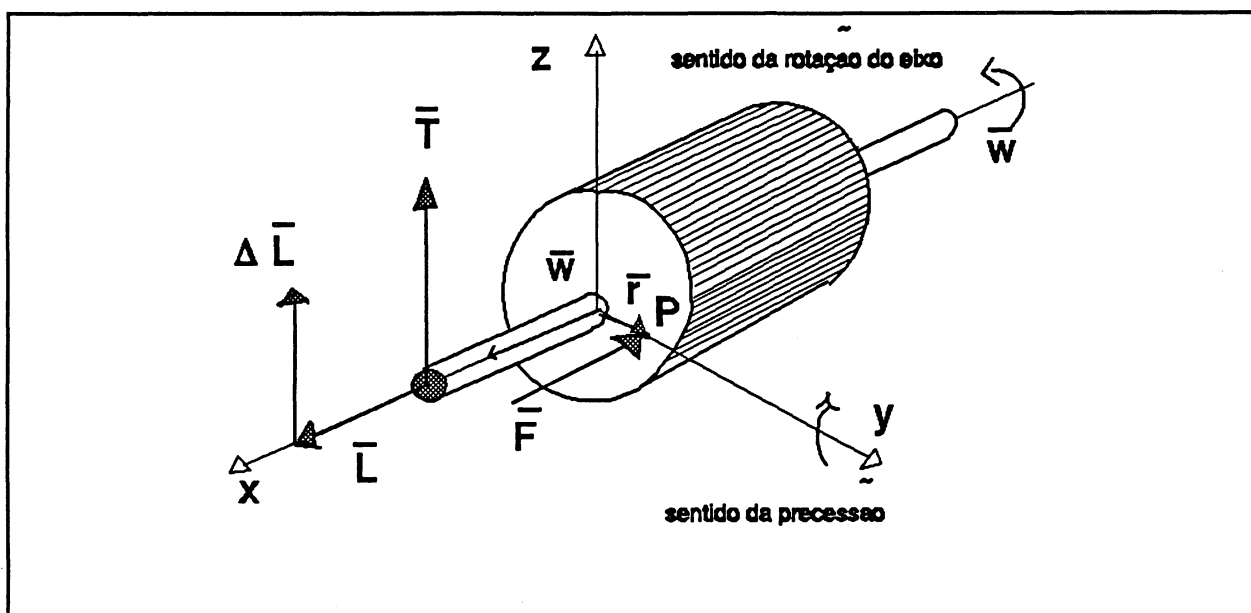
Uma importante propriedade destes instrumentos decorre da Lei de Conservação do Momento Angular, dada pela eq.(110). Se a taxa de variação do momento angular é nula, isto significa que este vetor  $L$  é constante, e como  $L = I \omega$ , infere-se que o eixo de rotação não muda sua orientação espacial, ou seja, não muda sua direção. Tal propriedade recebeu a denominação de RIGIDEZ GIROSCÓPICA, que pode ser expressa do seguinte modo (Berquó,1980):

" Se nenhuma força exercer torque sobre o giroscópio, a direção do eixo de rotação permanece inalterada".

Mesmo que houvesse uma força atuando ao longo da direção do eixo de rotação, a propriedade acima continuaria válida, um vez que tal força não possuiria braço ( $r$ ) e, portanto não exerceria torque. Se, ao contrário, uma força for aplicada ao giroscópio exercendo torque, seu eixo de rotação muda de direção e, essa mudança se faz, como visto anteriormente, no sentido do vetor torque aplicado. Como resultado observa-se um movimento de precessão giroscópica, que pode ser facilmente entendido através da figura a seguir:



FIGURA 18 - SENTIDO DE PRECESSÃO DO GIROSCÓPIO



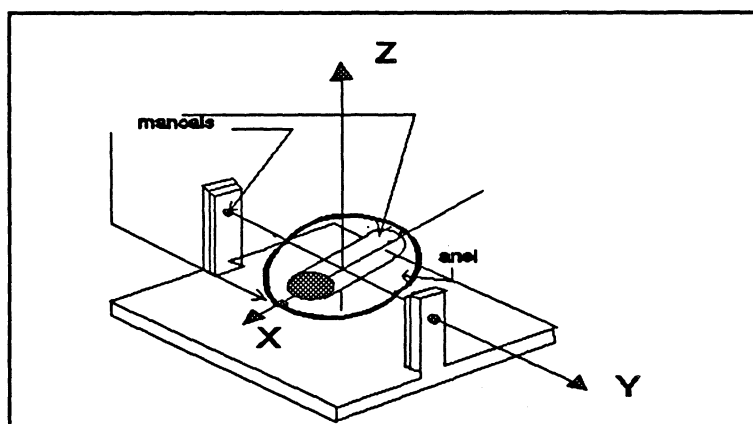
Observe-se cuidadosamente a fig.(18) . Tem-se aí uma força aplicada no ponto P do giroscópio. Essa força faz um ângulo de  $90^\circ$  com o vetor posição  $r$  do ponto, e em consequência, surge um torque  $\vec{T}$  na direção do eixo Z e no sentido positivo deste ( $T = r \times F$ ). Portanto, a precessão ocorrerá no sentido do vetor torque, isto é, o giroscópio deverá girar em torno do eixo Y, conforme mostrado na figura. Deve-se sempre salientar que, se o torque for perpendicular ao vetor momento angular, este só varia em direção e não em módulo.

Existem diversos tipos de giroscópios, cujos movimentos são condicionados pelo número de graus de liberdade do instrumento. Instalando-se o rotor de um giroscópio (massa cilíndrica de grande momento de inércia) que é colocada no interior de um anel mediante a utilização de mancais (idealmente sem atrito), e acoplando-se

este anel a uma estrutura fixa, também mediante rolamentos, tem-se a configuração denominada GIRO HORIZONTAL (Berquó,1980), em virtude da posição do eixo do rotor ser horizontal em relação a um referencial fixo à Terra. A fig.(19) mostra este dispositivo . Atuando-se sobre a estrutura na direção do eixo Y, o eixo de rotação manterá sua direção porque, considerando-se os mancais ideais, esta força não estará exercendo torque pois forma um ângulo de  $180^\circ$  com o vetor posição  $r$ ; De mesma maneira, atuando-se sobre o eixo X, a direção e o sentido de rotação do rotor são mantidos (pois neste caso  $r = 0$ ). Diz-se então que tal giroscópio possui dois graus de liberdade porque há dois movimentos possíveis da estrutura, sem que ocorra mudança na direção do eixo de rotação. Assim (Berquó,1980):

" um giroscópio possui tantos graus de liberdade quantos são as possibilidades de movimento da estrutura que não causem a precessão do mesmo ."

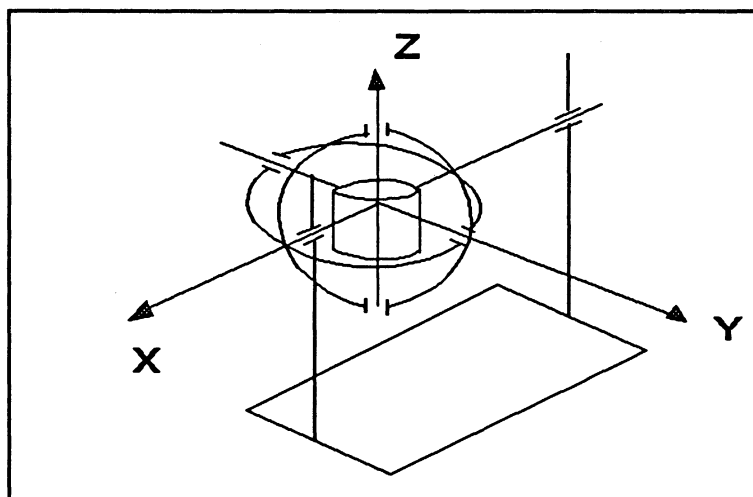
FIGURA 19 - GIROSCÓPIO COM DOIS GRAUS DE LIBERDADE



Observe-se que no giroscópio horizontal o eixo de rotação está contido no plano horizontal XY.

O giroscópio mostrado na fig.(20) possui três graus de liberdade, isto é, os movimentos da estrutura em torno dos eixos X,Y e Z não perturbam a direção do eixo de rotação. Tal montagem é denominada UNIVERSAL. Neste tipo de giroscópio sempre que uma força é aplicada a um dos anéis, o outro anel se movimenta no sentido do torque decorrente desta força. Evidentemente, quando o anel externo se movimenta, o anel interno é obrigado a acompanhá-lo.

FIGURA 20 - GIROSCÓPIO UNIVERSAL



Os mesmos princípios utilizados no giroscópio horizontal podem ser aplicados ao GIRO VERTICAL, com a diferença apenas que o eixo de rotação do rotor permanece na vertical ao plano horizontal. É este o tipo de instrumento que é utilizado em aeronaves.

## 1.6 Influência da Rotação da Terra

Neste trabalho vai-se tratar do caso específico do giroscópio horizontal com dois graus de liberdade devido ao fato que o instrumento objeto deste estudo, o giroteodolito ou teodolito-giroscópio se apresentar com estas características. Como se verá no capítulo III muito mais detalhadamente, o intuito de trabalhar-se com este instrumento é a obtenção do azimute de direções-problema. Por suas características giroscópicas de construção, o eixo de rotação do giroscópio idealmente permaneceria no plano horizontal, com o eixo de rotação oscilando em torno da meridiana ou Linha Norte-Sul. Na realidade, devido ao fato de o instrumento estar suspenso, este eixo pode descrever um movimento espacial. A oscilação ocorre porque a Terra exerce um torque externo sobre o eixo, que provoca o seu desvio para as proximidades da linha norte-sul. Como se verá adiante, em condições reais de trabalho deve-se avaliar não só o efeito da rotação da Terra sobre ele, mas as outras influências sofridas pelo instrumento durante sua utilização.

Sempre o requisito básico é estabelecer-se o sistema de referência inercial em relação ao qual vai-se avaliar as equações de movimento do giroscópio. Uma vez estabelecido um sistema cuja origem esteja no centro de massa da Terra e cujos eixos estejam orientados para as estrelas fixas, para um ponto situado sobre a superfície da Terra, a uma latitude  $\phi$ , a velocidade angular da Terra  $w_T$  (que aqui vai ser considerada constante) pode ser

decomposta em duas componentes, uma horizontal (segundo a meridiana) e a outra vertical, cujos módulos são  $w_{TV}$  e  $w_{TH}$ . De acordo com a fig.(22) pode-se dizer que:

$$w_{TV} = w_T \sin \phi \quad (121)$$

$$w_{TH} = w_T \cos \phi \quad (122)$$

Uma vez que o vetor torque tem direção sempre perpendicular à do vetor momento angular  $L_T$  da Terra, então sobre um giroscópio girando com velocidade angular  $w_g$  haverá um vetor torque externo sendo exercido perpendicularmente à direção do vetor  $L_T$ . Assim, sendo  $w_g$  a velocidade angular do giroscópio e  $A$  o ângulo formado no plano horizontal entre este vetor e a componente vertical  $w_{TV}$  do vetor velocidade angular da Terra, obtém-se a eq.123) que relaciona seus módulos:

FIGURA 21 - COMPONENTES DE  $w_T$

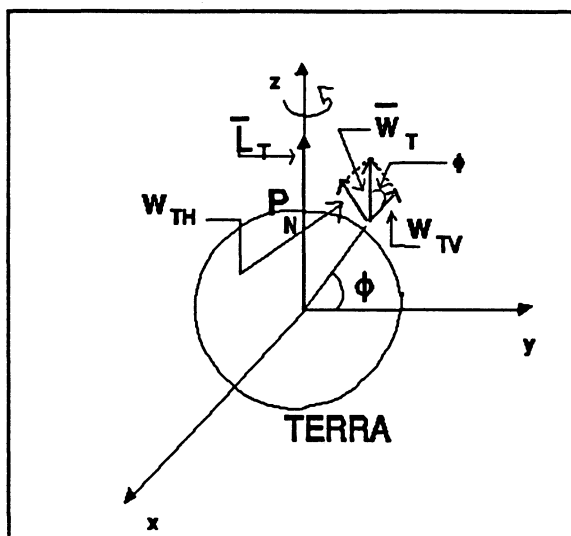
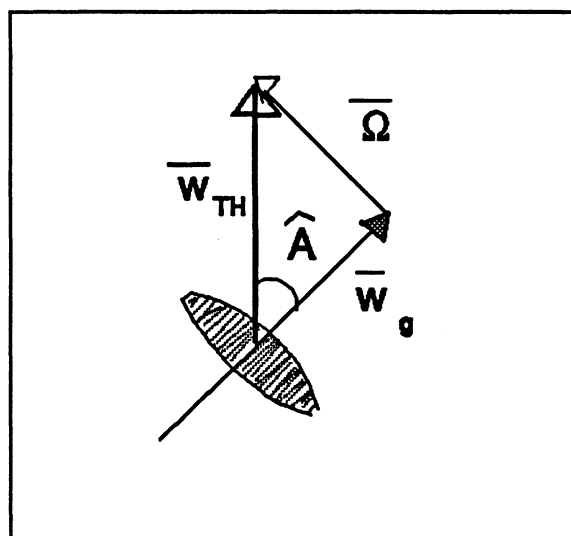


FIGURA 22 - VELOCIDADE ANGULAR DO GIROSCÓPIO



Então:

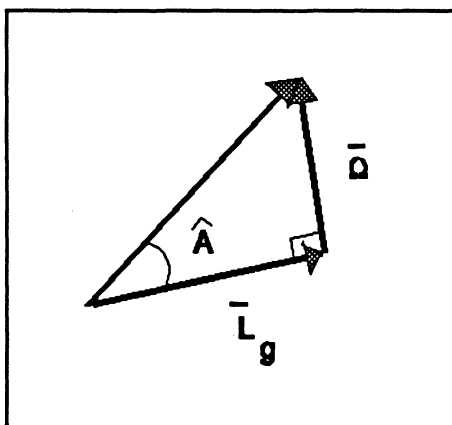
$$\text{sen } \hat{A} = \frac{\Omega}{w_{TH}} \quad (123)$$

onde  $\Omega$  é a componente da velocidade angular da Terra segundo o eixo os torques externos aplicados ao giroscópio (e que é, portanto perpendicular a  $w_g$  e a  $L_g$ ) . Logo, em módulo:

$$\Omega = w_{TH} \text{ sen } \hat{A} = w_T \cos \phi \text{ sen } \hat{A} \quad (124)$$

Sendo  $T_T$  o torque devido à Terra e  $L_g$  o vetor momento angular do giroscópio pode-se facilmente compreender  $\Omega$  como a componente da velocidade angular da Terra segundo o eixo dos torques.

FIGURA 23 - TORQUE EXERCIDO PELA TERRA SOBRE O EIXO



$\Omega$ , em módulo será a velocidade angular de precessão do giroscópio.

Assim:

$$T = \Omega \times L_g = w_T \cos \phi \text{ sen } A L_g \text{ sen } 90^\circ \quad (125)$$

$$T = w_T \cos \phi \sin A L_g \quad (126)$$

$$T = w_T \cos \phi \sin A I_g w_g \quad (127)$$

são, em módulo, o torque externo que atua sobre o giroscópio. Nas eq.(126) e (127) é fácil perceber que, quando o giroscópio está colocado no Equador ( $\phi=0^\circ$ ) o torque externo exercido pela Terra é máximo enquanto que, no polo, este torque se reduz a zero. Verifica-se também que o torque externo é nulo quando  $\theta = 0^\circ$ , ou seja, quando o eixo de rotação do giroscópio é paralelo à meridiana (linha norte-sul) deste observador. Devido a esta limitação o manual de operação do instrumento Wild-GAK1 apresenta como característica técnica o campo de emprego do instrumento até a latitude de  $75^\circ$  em ambos os hemisférios. E portanto, é característica de construção do instrumento que o seu eixo de rotação oscile em torno desta linha norte-sul, para ,na média apontar para o norte giroscópico. Só não existe torque atuante quando o eixo de rotação é paralelo ao eixo instantâneo de rotação da Terra. Portanto, em um movimento livre este eixo oscila em torno da linha norte-sul, enquanto em um movimento amortecido, após um tempo determinado pelas características do amortecimento, iria estacionar na direção da linha norte-sul.

## CAPÍTULO II

### ELEMENTOS DA ANÁLISE DE FOURIER

#### 2.1 INTRODUÇÃO

O movimento do eixo de rotação de um teodolito-giroscópio pode ser descrito aproximadamente por uma oscilação senoidal. Para estudar-se este movimento surge a necessidade de avaliar-se a estrutura deste sinal espectral, que é resultante da superposição de um sinal senoidal principal com outros sinais periódicos. Os sinais periódicos sobrepostos, são usualmente associados a uma série de efeitos que podem ser preditos teóricamente (e.g Vanicek, 1986; Jeudy, 1981) e cuja fundamentação foi apresentada no Cap.I e será retomada no Cap.III. Jeudy(1981) realizou um trabalho experimental, tornando a aquisição de dados, em um giroteodolito WILD GAK1 modificado, totalmente automática. Tal procedimento, mesmo que não aplicável em instrumentos convencionais, mostrou a importância dos diferentes sinais componentes como fontes de erro sistemático nas determinações, os quais não são discriminados no método convencional de análise(WILD,[ca,1970]), que será também discutido no Cap.III. Em uma situação intermediária, sem modificação do instrumento, é possível aumentar-se a densidade de observações do sinal com a utilização de um microcomputador como cronógrafo, conforme proposto neste trabalho. Isto possibilita a transformação do sinal do domínio dos tempos para o domínio das frequências, permitindo uma discriminação da frequência de algumas



componentes, assim como as suas amplitudes. Tal avaliação permite uma melhor descrição do sinal senoidal principal e das possíveis fontes de erro. Para este procedimento, apresenta-se a seguir os fundamentos da análise espectral do movimento giroscópico, baseada neste caso, sobre as transformadas de Fourier.

## 2.2 TRANSFORMADA DE FOURIER

Um processo físico pode ser descrito ou utilizando-se o domínio do tempo, através da construção de funções  $g(t)$  ou utilizando-se o domínio das frequências, quando o processo pode ser explicitado pela amplitude em função da frequência. Neste caso, constrói-se a função  $G(f)$  com  $-\infty < f < \infty$ . Na realidade,  $g(t)$  e  $G(f)$  são duas representações da mesma função, ligadas pela transformada de Fourier. Se a função  $g(t)$  for contínua no tempo, ao passar-se para o domínio das frequências, ocorre o caso em que o período  $T \rightarrow \infty$ , de modo que o espaçamento entre os harmônicos tende a zero e  $G(f)$  torna-se uma função contínua. O par de transformadas de Fourier que ligam os dois domínios é (Jenkins & Watts, 1968; Randall, 1987):

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i 2 \pi f t} dt \quad (128)$$

e :

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i 2 \pi f t} df \quad (129)$$

com  $2 \pi f = \omega$  sendo a frequência angular. Estas transformações são recíprocas e lineares.

### 2.3 POTÊNCIA DO SINAL

A potência espectral é uma grandeza associada à distribuição de energia nas diversas frequências componentes de um sinal espectral. O valor da potência total contida num sinal, independe do domínio em que ela é calculada, e é dada por (ver apêndice 1) (Randall, 1987):

$$P_t \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \quad (130)$$

A eq.(130) é denominada de Identidade de Parseval. Entretanto, num intervalo de tempo não consegue-se distinguir as frequências positivas ou negativas do sinal espectral. Isto significa que ao se tentar calcular a potência espectral por unidade de frequência ou densidade de potência espectral, passa-se a trabalhar com a forma de representação denominada unilateral ou frontal (1-Sided Power Spectrum Density, PSD), uma vez que pode-se considerar o intervalo de frequências variando entre zero e infinito. Assim, a densidade de potência espectral unilateral ou

frontal, considerando-se apenas o intervalo positivo acima descrito, pode ser definida como:

$$p_g(f) \equiv |G(f)|^2 + |G(-f)|^2 \quad (131)$$

com  $0 \leq f < \infty$ . Deste modo, a potência total é a integral de  $p_g(f)$  no mesmo intervalo.

Se, num caso particular, a função  $g(t)$  for real e par os dois termos da equação serão iguais, ou seja,

$$p_g(f) = 2 |G(f)|^2 \quad (132)$$

Pode entretanto, ocorrer a definição sem o fator 2. Neste caso, está-se introduzindo a assim chamada densidade de potência espectral bilateral ou especular.

As fig.(24), (25) e (26) mostram a comparação entre estas formas de representação do espectro de potências.

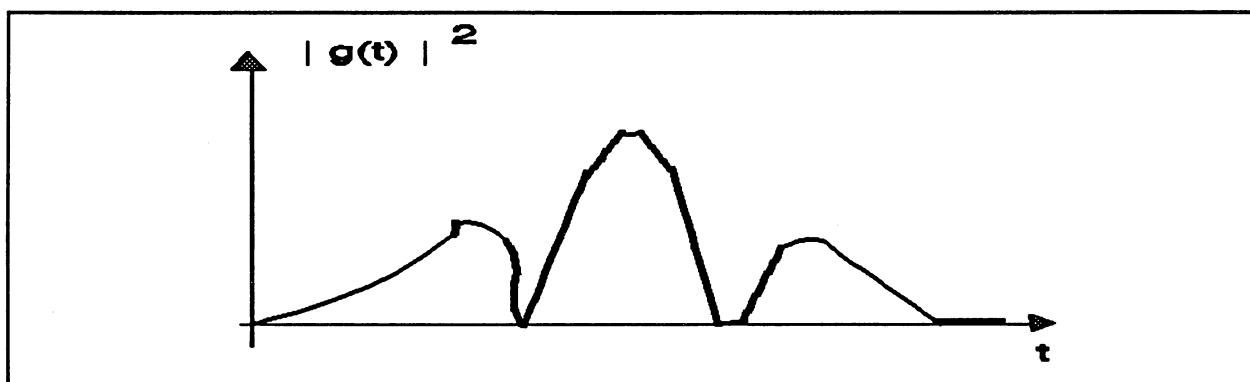
FIGURA 24 - ÁREA SOB O QUADRADO DA FUNÇÃO  $g(t)$ 

FIGURA 25 - MESMA ÁREA SOB UM ESPECTRO UNILATERAL

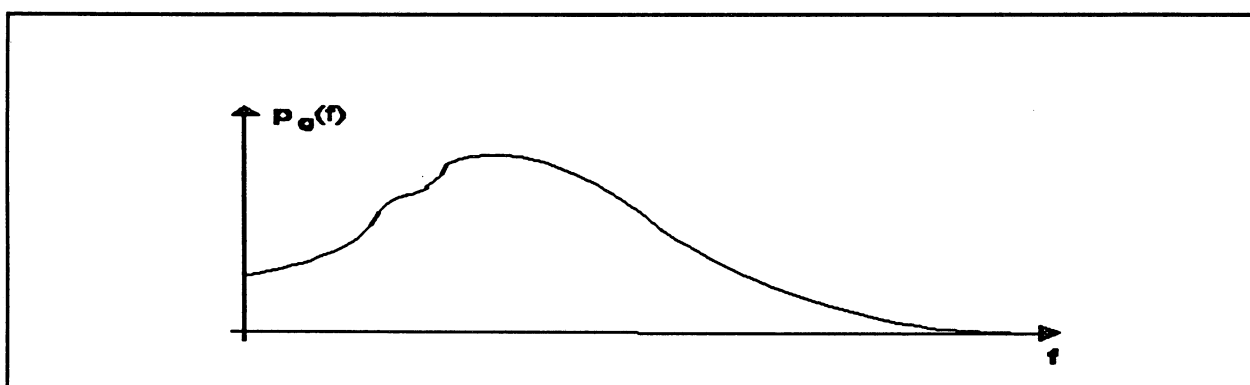
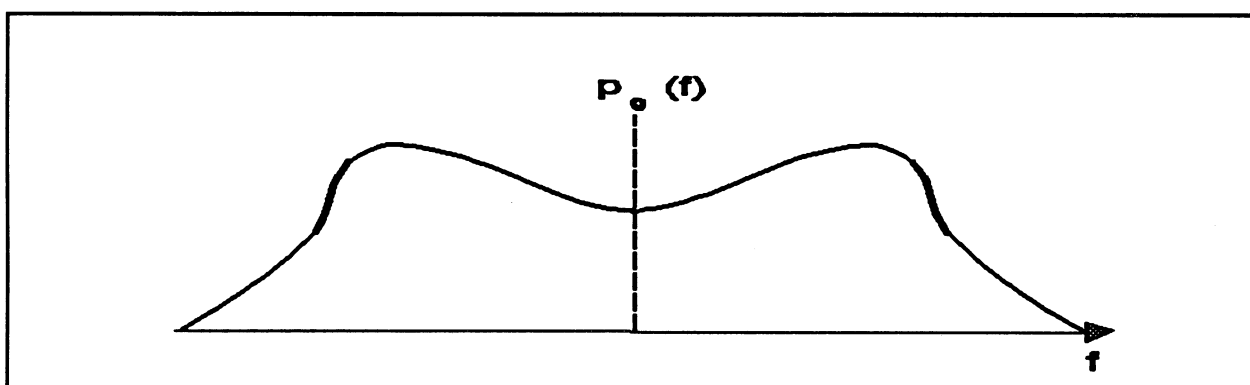


FIGURA 26 - MESMA ÁREA SOB UM ESPECTRO BILATERAL



sendo  $p_g(f)$  a densidade de potência espectral.

Se o valor de  $g(t)$  variasse com  $-\infty < t < \infty$  então o valor da potência total e da densidade de potência espectral seriam geralmente infinitos. Devido a isto, introduz-se a densidade de potência espectral por unidade de tempo, a qual permite calcular-se a integral sobre um intervalo de tempo finito ou seja, avaliando-se apenas um trecho ou janela da função  $g(t)$ , como acontece na prática. Uma vez calculada a densidade de potência espectral para este intervalo, pode-se dividi-lo pelo valor deste intervalo de tempo considerado. A identidade de Parseval estabelece que neste caso a integral da distribuição unilateral por unidade de tempo sobre as frequências positivas é igual ao valor médio quadrático da amplitude do sinal  $g(t)$ , conforme definição constante no Apêndice 2 (Rikitake et alii, 1987; Randall, 1987).

Uma questão usualmente estabelecida (Randall, 1987) envolvendo a densidade de potência espectral por unidade de tempo é a da sua convergência para um valor ao utilizar-se dados referentes a longos intervalos de tempo. Neste caso, a densidade de potência espectral por unidade de tempo assumirá valores finitos para todas as frequências exceto para aquelas em que a função  $g(t)$  tem um componente senoidal ou cossenoidal discreta e de amplitude finita. Nestas frequências ela torna-se uma função delta (ver apêndice 2), isto é, uma função altamente concentrada mas que converge para o valor médio quadrático da amplitude da componente discreta (senoidal ou cossenoidal) naquela frequência.

## 2.4 TRANSFORMADA DE FOURIER APLICADA A AMOSTRAGENS TEMPORAIS

### 2.4.1 Introdução

Num experimento qualquer onde se registram dados em função do tempo, o que se obtém na realidade é uma seqüência temporal discreta da variável amostrada. Nas seções 2.2 e 2.3 considerou-se a função  $g(t)$  contínua no tempo. Uma vez que na amostragem obtém-se um conjunto de dados discreto relativos à função  $g(t)$ , é necessário avaliar-se qual a influência deste aspecto sobre a transformada de Fourier.

### 2.4.2 Freqüência Crítica de Nyquist

Considere-se de início que esta seqüência seja de valores equi-espaçados no tempo, sendo  $\Delta$  este intervalo de tempo entre as amostras. Neste caso, a freqüência amostral( $f_s$ ) será o número de amostras ( $n$ ) tomadas num intervalo de tempo total  $t_n$ . Assim,

$$f_s = \frac{n}{t_n} \quad (133)$$

onde,

$$t_n = n \Delta \quad (134)$$

Assim sendo,

$$f_s = \frac{n}{t_n} = \frac{1}{\Delta} \quad (135)$$

De acordo com o Teorema de Amostragem de Shannon's (Schwartz, 1979), um sinal temporal amostrado não deve conter valores de componentes de frequência acima da frequência crítica de Nyquist, a qual corresponde à metade do valor da frequência amostral. Esta corresponde a um valor crítico de frequências, abaixo do qual não se pode recuperar informações do sinal espectral amostrado. Assim,

$$f_c \equiv \frac{1}{2 \Delta} \quad (136)$$

lembrando-se que  $\Delta$  é o intervalo de tempo entre duas amostras consecutivas. Se uma função contínua  $g(t)$  que esteja sendo amostrada em um intervalo qualquer  $t_n$ , possui um espectro de frequências (banda) de largura limitada ou simplesmente banda limitada, em frequências menores que a frequência crítica, então a transformada  $G(f) = 0$  para todos os valores de  $-f_c < f < f_c$  e a função  $g(t)$  é completamente determinada por sua frequência amostral. Deste modo (Press et alii, 1989):

$$g(t) = \Delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t_n) \frac{\text{sen} [2 \pi f_c (t - n \Delta)]}{\pi (t - n \Delta)} \quad (137)$$

O fato importante nesta última equação é a manutenção de todas as informações contidas na função contínua original, apesar

de ter-se tomado amostras apenas de um trecho da função. Outro aspecto importante é que embora tenha-se inicialmente suposto que as amostras devam ser tomadas a intervalos regulares de tempo, no desenvolvimento da teoria o procedimento pode ser generalizado (Schwartz, 1979), sem a necessidade de intervalos equi-espçados no tempo.

### 2.4.3 Transformada Discreta de Fourier

Suponha-se que as amostras da função temporal  $g(t)$ , são tomadas a intervalos regulares de tempo  $\Delta$ . Se forem obtidos  $N$  valores amostrais consecutivos correspondentes à função  $g(t)$  em um tempo total  $t_k$ , então de acordo com a eq.(134):

$$t_k = k \Delta \quad (138)$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ . Deste modo, pode-se dizer que:

$$g_k \equiv g(t_k) \equiv g(k \Delta) \quad (139)$$

Supondo-se  $N$  seja par e que a função  $g(t)$  seja diferente de zero apenas num intervalo de tempo finito que contenha os  $N$  pontos amostrais, então obtém-se  $N$  dados amostrais independentes. Portanto, ao tentar-se calcular a Transformada de Fourier no domínio das freqüências ( $G(f)$ ), de todos os valores de freqüência contidos no intervalo  $(-f_c, f_c)$ , vai-se na realidade tentar estimar



apenas valores discretos de freqüência que, com base na eq.(133), são dados por:

$$f_n = \frac{n}{N\Delta} \quad (140)$$

onde  $n = -N/2, \dots, N/2$ . Os valores inferior e superior de  $n$  correspondem exatamente aos limites determinados pelas freqüências críticas  $(-f_c, f_c)$  de Nyquist. Com isto, observa-se que resultam  $(N+1)$  valores para  $n$  na eq.(140). Mas os dois valores extremos são iguais e não são independentes, reduzindo-se para  $N$  o número de valores independentes. Assim, na eq.(128) (Press et alii, 1989), a função contínua:

$$G(f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i 2\pi f_n t} dt \quad (141)$$

ao ser amostrada, será descrita por:

$$\approx \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k) e^{-i 2\pi f_n t_k} \Delta \quad (142)$$

Substituindo-se a eq.(140) e a eq.(138) na eq.(142) vêm:

$$\approx \Delta \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k) e^{-i \frac{2\pi n k}{N}} \quad (143)$$

que é a Transformada de Fourier correspondente aos  $N$  pontos amostrais, obtidos a partir de  $g(t_k)$ . Usualmente, relaciona-se  $G(f_n)$

com  $G_n$  definindo-se:

$$G_n \equiv \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k) e^{-i \frac{2\pi n k}{N}} \quad (144)$$

pois o valor de  $\Delta$  é um fator de escala de tempo. Assim:

$$G(f_n) \approx \Delta G_n \quad (145)$$

A eq.(144) é chamada Transformada de Fourier Discreta (Discrete Fourier Transform - DFT) da função  $g(t_k)$ . Na realidade, ela mapeia os  $N$  números complexos correspondentes aos  $k$  instantes ( $g(t_k)$ ) independentemente de qualquer parâmetro dimensional, tal como  $\Delta$ .

A transformada discreta de Fourier inversa será então (Press et alii, 1989):

$$g_n = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G_n e^{i \frac{2\pi k n}{N}} \quad (146)$$

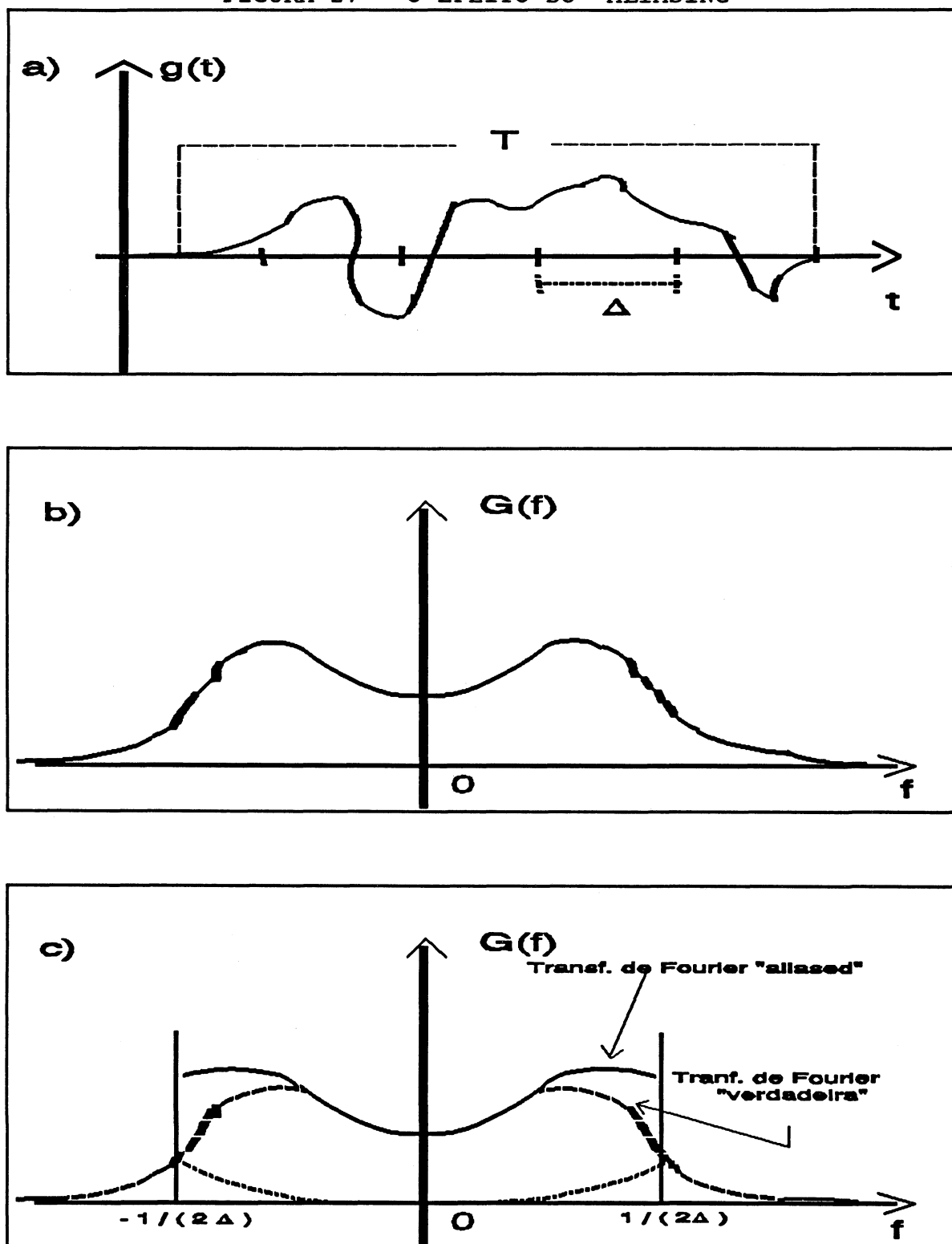
#### 2.4.4 "Aliasing" e "smoothing"

Se uma função contínua tem uma banda limitada situada em frequências que não sejam menores que a frequência crítica, como foi suposto no item anterior, então a densidade de potência espectral associada às frequências contidas fora do intervalo  $-f_c < f < f_c$  são movimentada, ou falsamente transladadas para dentro do intervalo de frequências  $(-f_c, f_c)$ . A este comportamento

denomina-se "aliasing". Se uma função contínua for corretamente amostrada então a sua transformada de Fourier deverá ser zero fora do intervalo  $(-f_c, f_c)$ . Se a amostragem foi competente, e os efeitos do "aliasing" minimizados, então a transformada de Fourier tenderá a zero à medida que aproxima-se dos valores de  $-f_c$  e  $f_c$ . Caso contrário, a transformada assume um valor finito e o efeito do "aliasing" não foi minimizado.

Na fig, (27) mostra-se o efeito do "aliasing" (Press et alii, 1989). Na parte a) mostra-se uma função  $g(t)$  que não é igual a zero apenas no intervalo finito de tempo. E consequência disto, sua transformada de Fourier mostrada em b) não possui banda limitada, pois tem uma amplitude finita para todas as frequências. Se a função original  $g(t)$  é amostrada com um intervalo  $\Delta$  de tempo entre as amostras consecutivas, então a transformada de Fourier é definida apenas entre  $(\pm f_c)$  e a potência que fica fora deste intervalo é transladada ("aliased") para dentro do intervalo. A parte c) da figura mostra este efeito. Em termos práticos, filtrando-se a função original através de um filtro passa-baixo, antes de tomar-se as amostras, consegue-se eliminar o efeito do "aliasing".

FIGURA 27 - O EFEITO DO "ALIASING"



Um outro processo que deve-se conhecer quando da análise dos dados é o denominado "smoothing", que consiste na filtragem das componentes de alta frequência, de modo a aumentar a relação entre os níveis do sinal e dos ruídos (Conte & Boor, 1988). As figuras (28) e (29) mostram um exemplo de supressão de altas frequências num sinal.

FIGURA 28 - SINAL PERIÓDICO REAL E SEU ESPECTRO DE POTÊNCIAS

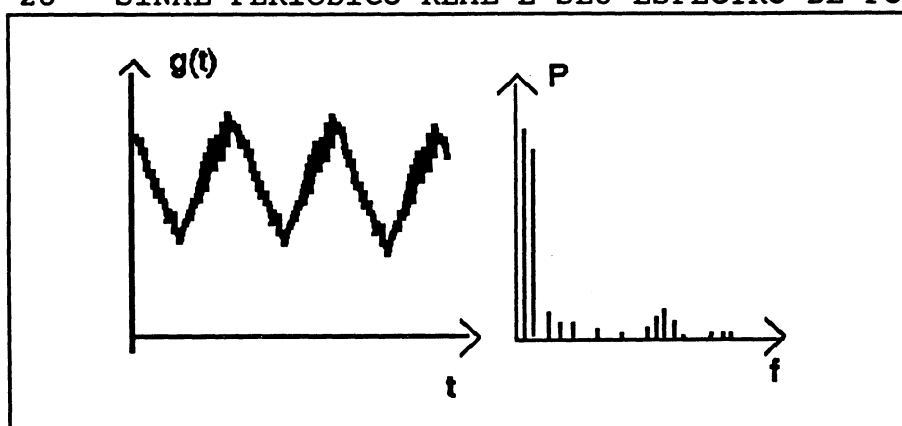
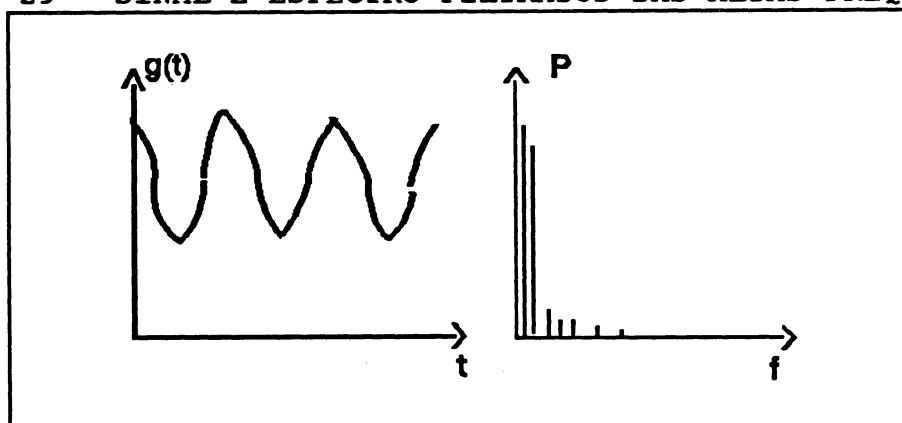


FIGURA 29 - SINAL E ESPECTRO FILTRADOS DAS ALTAS FREQUÊNCIAS



## 2.5 TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

### 2.5.1 Introdução

Quando estuda-se a Transformada Discreta de Fourier um aspecto muito importante a ser avaliado é o número de multiplicações complexas envolvidas no processo de cálculo; se existirem  $N$  componentes de frequência em  $N$  amostras temporais, serão necessárias  $N^2$  multiplicações complexas, o que, computacionalmente, requer um tempo de processamento proporcional a este valor, e que pode ser diminuído pela utilização de algoritmos. Um destes, que possui várias formas diferentes de apresentação, é denominado Transformada Rápida de Fourier (Fast Fourier Transform-FFT) e fornece os mesmos resultados fornecidos pela Transformada Discreta de Fourier, porém com a vantagem de realizar-se um número menor de multiplicações complexas, reduzindo-se o tempo computacional necessário para um valor proporcional a  $N \log_2 N$  (Brigham, 1974; Randall, 1987). Este algoritmo prático foi introduzido por Cooley e Tukey (1965), e possui outras vantagens, além da redução do tempo computacional de cálculo, como por exemplo:

- a) as informações sobre a fase do sinal espectral são mantidas quer realizando-se a transformação num sentido (do domínio do tempo para o das frequências), quer sentido inverso.
- b) este tipo de transformada é hoje disponível em uma variedade

de aplicativos para análise numérica, até mesmo para computadores pessoais.

### 2.5.2 Algoritmo de Base 2 (Radix 2)

Dentre os diversos tipos de algoritmos FFT enfatiza-se a seguir aquele em que o número  $N$  de pontos amostrais correspondentes a  $g(t_k)$  pode ser expresso pela relação  $N = 2^\gamma$ , onde  $\gamma$  é um número inteiro. Posteriormente (Brigham, 1974) esta restrição pode ser eliminada. Em parte da literatura, este algoritmo é denominado Radix 2, porque o valor de  $N$  nas eq. (134) e (135) é uma potência de 2. Para isto, considere-se que  $W$  seja um número complexo dado por:

$$W \equiv e^{-i \frac{2\pi}{N}} \quad (147)$$

Recordando-se a eq. (144),

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k) e^{-i (2\pi n k)/N}$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ , pode-se reescrevê-la como:

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k) W^{nk} \quad (148)$$

Esta é a expressão básica que de modo geral aparece nos manuais dos aplicativos que realizam a Transformada Rápida de Fourier na solução da Transformada Discreta de Fourier. Para um

aprofundamento na estrutura do algoritmo da FFT, o Apêndice 2 apresenta exemplos detalhados para  $N = 4$  e  $N = 16$  (Schwab, 1994).

### 2.5.3 Pontos da análise de Fourier que aqui serão utilizados

Neste trabalho, conforme será detalhado no Cap. III, são realizadas medidas temporais correspondentes aos instantes cronométricos das passagens da marca de referência do giroscópio do giroteodolito pelas diversas amplitudes visualizadas na escala auxiliar de leituras. Com isto, o movimento do eixo de rotação, que pode ser descrito por um movimento aproximadamente senoidal, é o sinal espectral que será amostrado e analisado, para verificação das diversas componentes espectrais. Neste sentido, será utilizada a potência espectral para levantar-se a amplitude e a fase destas componentes, além de verificar-se o valor da frequência de cada uma delas. Assim poderá ser avaliado quais as componentes espectrais que podem ser levantadas, dentre as previstas teóricamente, pela utilização do método de registro de dados e de análise introduzidos neste trabalho.

No estudo do comportamento das componentes, é ainda possível avaliar-se a dissipação de energia nas várias frequências componentes. As transformadas de Fourier das séries adquiridas serão efetuadas com o propósito de localizar, além da frequência fundamental, outras frequências componentes, as quais contenham energia capaz de produzir erros nas observações.

Em um primeiro passo efetua-se uma transformação



$g(t) = G(f)$  sobre uma seqüência de dados eqüiespaçados obtidos a partir da seqüência adquirida pela interpolação e filtragem polinomial iterativa. O intervalo  $\Delta$  neste processo de interpolação é construído como sendo igual à média dos intervalos de amostragem.

Outra fase a ser realizada é a análise dos resíduos após o ajustamento senoidal aos dados, verificando onde situam-se as energias remanescentes, o que permite uma avaliação do processo de ajustamento e a localização das freqüências onde restam energias.

Os resultados buscados são então, a estrutura espectral do sinal adquirido e também a estrutura dos resíduos após o ajustamento senoidal da freqüência principal, pela utilização do algoritmo supra citado da Transformada Rápida de Fourier. Estes procedimentos permitem a avaliação das fontes de erro em relação aos resultados obtidos com métodos tradicionais e em relação aos resultados obtidos através da automação total do processo de coleta de dados, realizada por JEUDY(1980).

## CAPÍTULO III

### O GIROTEODOLITO

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Nesta parte experimental de trabalho vai-se levantar séries temporais utilizando-se um giroteodolito WILD GAK1 que é constituído de um giroscópio aliado a um teodolito e que possibilita a determinação do azimute de uma direção. Por este motivo, no Cap.I foram apresentados os conceitos referentes à dinâmica de rotação do giroscópio, que possibilita o entendimento dos princípios físicos sobre o qual se apóia a teoria de construção do instrumento.

Inicialmente, apresenta-se um breve histórico de desenvolvimento do instrumento, bem como elementos fundamentais para a compreensão do seu mecanismo de funcionamento. O Método das Passagens e os procedimentos de coleta de dados são também descritos.

A seguir apresenta-se o método de automação desenvolvido por Jeudy(1981), denominado Método das Passagens Múltiplas, e o método desenvolvido neste trabalho, que pode ser denominado Método das Passagens Múltiplas Com Automação Parcial. Como forma de avaliação do grau de precisão obtido com cada método, realiza-se uma análise dos dados coletados utilizando-se inicialmente a metodologia tradicional indicada pelo Manual de operação do

instrumento (WILD, ca[1970]) e (Nadal, 1982), e utilizando-se o método desenvolvido neste trabalho. Este, através do ajustamento do período principal sobre observações múltiplas, utiliza-se também da Análise de Fourier, através de uma Transformada Rápida de Fourier no processamento. Finalmente, compara-se a precisão deste último em relação à dos outros dois métodos.

### 3.2 HISTÓRICO

No desenvolvimento do giroscópio alguns trabalhos tiveram grande importância, como por exemplo:

1862- Cayley baseado em trabalhos de Euler estudou o problema fundamental da dinâmica do corpo sólido.

1884- Kelvin demonstrou a possibilidade de medir-se a rotação da Terra através da bússola giroscópica.

1897-1910 - Klein e Sommerfeld estabelecem em dois volumes a Teoria do Giroscópio.

1950- Deimel apresenta um trabalho clássico sobre a dinâmica de rotação do giroscópio.

A partir do início deste século, os trabalhos sobre o giroscópio passaram a despertar grande interesse por parte de empresas interessadas no desenvolvimento de instrumentos de navegação giroscópica para navios e aviões. Com isto, o nível de conhecimento sobre o movimento giroscópico aumentou muito.

O teodolito-giroscópio como instrumento específico a ser utilizado para fins geodésicos e topográficos teve, todavia, um

histórico particular de trabalhos apresentados (Nadal,1980):

1914- K. Haussmann apresentou ao Institute of Mine Surveyors, Alemanha, um trabalho onde sumarizou a Teoria do Giroscópio e mostrou suas aplicações na determinação da meridiana em minas.

1961- As indústrias de minas introduziram o IPM (Indicador Preciso do Meridiano), que fornecia um azimuth com precisão de 20" após duas horas de trabalho, e tinha massa de 45 kg. Este instrumento foi desenvolvido por Rellensmann para a Bergakademie.

197\_ - Surge o giroteodolito WILD GAK1, que utiliza-se também do sistema Rellensmann, mas é muito mais portátil que o IPM pois seu diâmetro é de 8,5 cm e sua massa é 1,8 kg. Suas características técnicas dadas pelo Manual que acompanha o instrumento estão colocadas no Apêndice 3.

Uma descrição sumária deste instrumento é apresentada a seguir. A descrição detalhada pode ser encontrada em (Nadal,1982) e (WILD,[ca,1970]). O giroteodolito é obtido pela união de um teodolito, no caso um WILD T2 com um giroscópio acoplado sobre ele através de uma ponte de fixação. Um motor elétrico impulsiona o giroscópio até que ele atinja a velocidade angular de 22000 rpm e o momento angular de  $0,186 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$ . Este motor elétrico utiliza corrente alternada e por isto existe um conversor pois a energia é suprida por baterias de 12V. Portanto, o giroteodolito WILD GAK1 é constituído dos seguintes elementos: a) um teodolito WILD T2; b) um giroscópio WILD GAK1; c) um conversor WILD GKK3; d) duas baterias de 12V; e) um carregador de baterias; f) acessórios para instalação, manutenção e transporte.

O giroscópio propriamente dito compõe-se de dois sistemas, um sistema de suporte e um sistema oscilante. Quando a placa de amortecimento é afastada do rotor (aqui considerado juntamente com o motor elétrico), este fica suspenso por uma cinta num movimento semelhante ao de um pêndulo, no caso de torção, devido ao fato de esta cinta sofrer torção, e constitui-se num giroscópio suspenso com dois graus de liberdade, também denominado giropêndulo. Por outro lado, o sistema de suporte é constituído pelo teodolito e pela parte externa do giroscópio. O acoplamento entre o giroscópio e o teodolito é feito de maneira que o eixo de rotação do giroscópio e o eixo de pontaria do teodolito se encontrem no mesmo plano vertical quando a marca de referência observada através da lupa de observação estiver centrada no meio do índice. Um mecanismo de bloqueio controla a suspensão do rotor.

Quando o rotor está girando com a velocidade angular de 22000 rpm, seu vetor momento angular tende a conservar-se na direção em que se encontrava quando foi acionado. Mas como o giroscópio é solidário com a Terra, através do tripé, o giropêndulo reage a esta perturbação precessionando em torno da direção vertical até que seu eixo de rotação passe a se orientar no plano da meridiana geográfica. A partir daí o rotor gira com a Terra de oeste para leste e não mais é perturbado pelo movimento de rotação desta. Entretanto, devido ao seu momento de inércia, o giroscópio ao precessionar passa da direção do Norte, e fica oscilando em torno desta direção de modo ligeiramente amortecido. O valor do

→

torque externo (T) exercido pela Terra sobre o giroscópio é então

dados pela eq. (127):

$$T = w_T \cos \phi \sin A I_g w_g$$

onde  $w_T$  é o módulo do vetor velocidade angular da Terra,  $\phi$  é a latitude do ponto onde está instalado o instrumento,  $A$  é o ângulo formado entre o vetor velocidade angular do giroscópio e o vetor velocidade angular da Terra,  $I_g$  é o momento de inércia do giroscópio em relação ao seu eixo de rotação e  $w_g$  é o módulo do vetor velocidade angular do giroscópio.

### 3.3 INSTALAÇÃO E DESCRIÇÃO DOS COMPONENTES DO GIROTEODOLITO

A instalação do instrumento é simples, pois uma vez fixado o teodolito sobre um tripé ou base, prende-se o giroscópio sobre ele através da ponte de fixação e do anel de fixação. Esta ponte possui três apoios esféricos que forçam o giroscópio a ocupar sempre a mesma posição em relação ao limbo horizontal do teodolito. Uma vez conectado o cabo do conversor ao instrumento, deve-se passar às operações normais de calagem do teodolito.

Observe-se a fig. (30). Ela apresenta a seção longitudinal do giroscópio WILD GAK1.

FIGURA 30 - CORTE TRANSVERSAL DE UM GIROTEODOLITO WILD GAK1

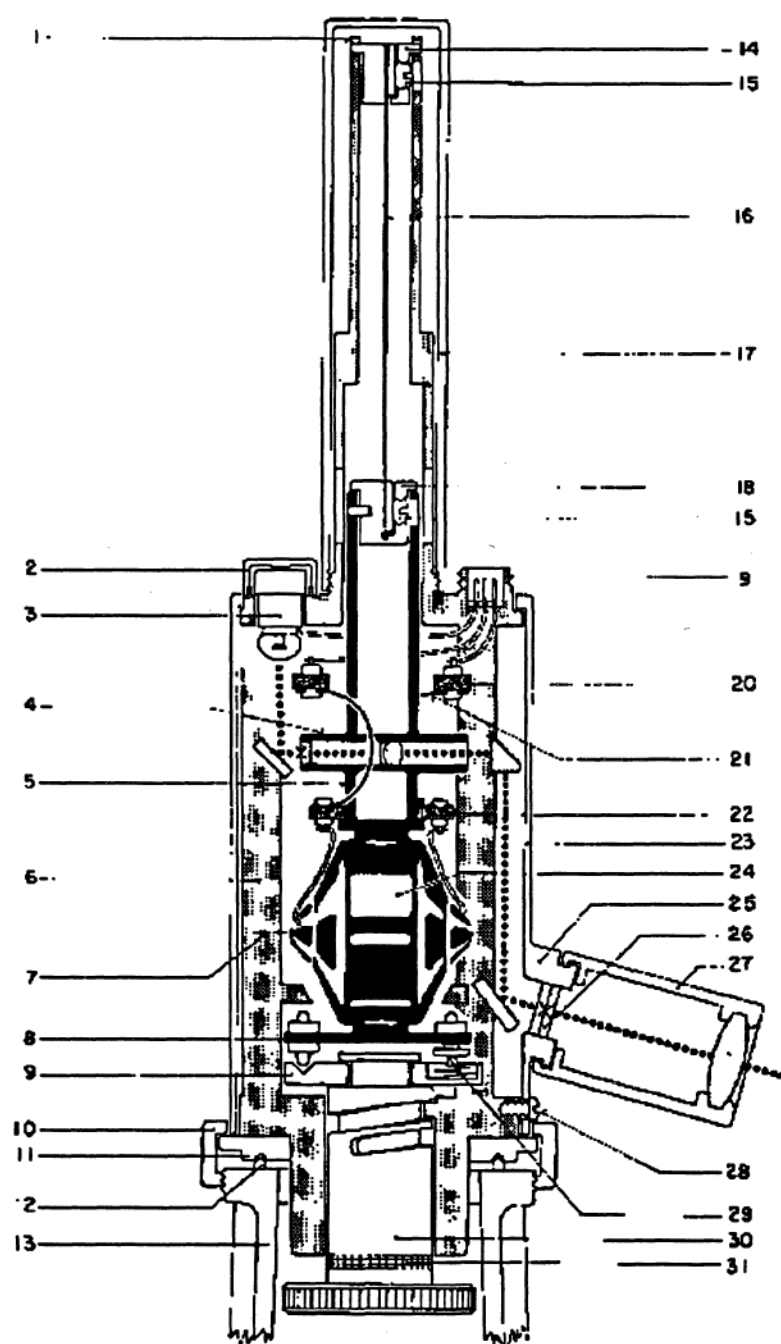


Fig. 3.4.2 — Seção longitudinal do Giroscópio Wild GAK-1

As seguintes partes componentes podem ser listadas, de acordo com os números de referência :

01 - Parafusos de fixação da pinça superior da cinta;  
02 - Protetor da lâmpada; 03 - Lâmpada; 04 - Objetiva;  
05 - Tronco; 06 - Coluna; 07 - Eixo de rotação; 08 - Placa de amortecimento; 09 - Placa de bloqueio; 10 - Anel de fixação;  
11 - Ranhuras em forma de V; 12 - Apoio esférico; 13 - Ponte;  
14 - Pinça superior de fixação; 15 - Parafuso de ajuste;  
16 - Cinta de suspensão; 17 - Tubo de proteção do tronco;  
18 - Pinça inferior; 19 - Conector para o cabo do conversor;  
20 - Placa isolante ( fixa ); 21 - Cinta condutora; 22 - Placa de isolamento; 23 - Caixa cilíndrica do giroscópio;  
24 - Giromotor; 25 - Saliência para a fixação da escala;  
26 - Cristal esmerilhado com a escala e índice; 27 - Lupa de observação (separável); 28 - Parafuso de fixação da caixa cilíndrica; 29 - Espiga de contato; 30 - Cilindro do mecanismo de bloqueio; 31 - Anel vermelho de advertência.

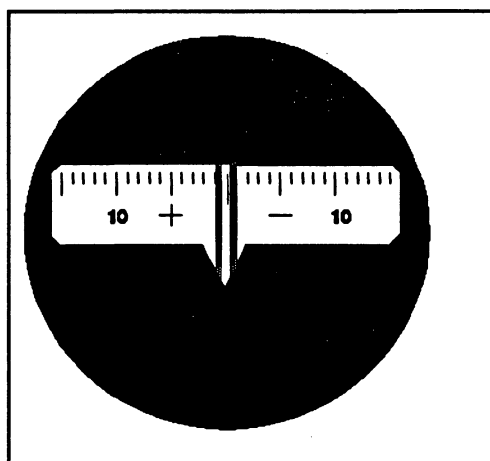


### 3.4 OPERAÇÃO DO GIROTEODOLITO WILD GAK1

Para a operação do instrumento, deve-se colocar o interruptor de bateria na posição INTERN, no caso estar-se utilizando uma bateria interna, e mudar o botão de arranque que se encontra na posição OFF para a posição RUN. Durante o processo de aceleração do rotor aparecerá a marca de controle de rotações na cor vermelha e, após o rotor atingir a velocidade angular de 22000 rpm e nela se estabilizar, o referido controle passará a mostrar a cor branca. No processo de frenagem para desligar o instrumento, é necessário colocar-se o botão na posição BRAKE, quando aparecerá a cor vermelha novamente no controle de rotações, até que o rotor esteja com velocidade angular nula, quando então aparecerá a cor branca. Assim, pode-se passar o botão para a posição OFF novamente e desligar a bateria. Observe-se que quando o rotor se encontra estabilizado a 22000 rpm, um forte barulho aparecerá indicando que a placa de amortecimento está prendendo o rotor, ou seja, ele ainda não se encontra livre para oscilar. Girando-se o anel de advertência deve-se observar uma faixa vermelha. Enquanto o anel estiver sobre esta faixa, o elemento suspenso (giropêndulo) ainda estará preso. Somente ultrapassando-se a faixa vermelha é que o rotor estará livre para oscilar. Deve-se observar que a objetiva de projeção com a marca de referência também faz parte do sistema oscilante e acompanha a oscilação do rotor. Por outro lado, o sistema de suporte, contém em sua parte externa o vidro esmerilhado e a escala auxiliar sobre a qual é projetada a marca de referência

sem paralaxe, ao qual é justaposta a lupa de observação móvel. A marca de referência centrada é mostrada na fig.(31).

FIGURA 31 - MARCA CENTRAL DE REFERÊNCIA



É importante ressaltar-se um aspecto consequente da construção do instrumento e que pode causar dúvidas nos cálculos posteriores do azimuth giroscópico. Devido ao fato de a imagem da marca de referência projetada, ser refletida por um espelho colocado bem à frente do vidro esmerilhado que contém a escala, a imagem vista pelo observador é a imagem especular do movimento da objetiva de projeção com a marca de referência e, em consequência, do eixo de rotação do rotor. Isto significa que, após solto o sistema oscilante, o observador que vê a marca de referência movendo-se para a esquerda ou lado positivo da escala auxiliar, estará, na realidade, acompanhando o movimento do rotor para o lado direito. De igual maneira, o observador que estiver acompanhando o deslocamento da marca de referência para o lado negativo ou à

direita da escala auxiliar, estará visualizando o movimento do rotor para a esquerda.

### 3.5 PRÉ-ORIENTAÇÃO DO GIROTEODOLITO WILD GAK1

Ao iniciar a utilização do instrumento, o operador deve ter consciência dos procedimentos e problemas a serem de início enfrentados. O maior cuidado a ser tomado durante toda a operação com o WILD GAK1 é com a marca de referência que, se "colar" na extremidade da lupa de projeção, dificilmente o instrumento poderá ser recolocado em condição de uso imediato causando a interrupção das observações. O cuidado a ser tomado sempre então é, ao mover-se o cilindro do mecanismo de bloqueio no sentido de ir-se soltando a parte oscilante ou giropêndulo, observar-se cuidadosamente a marca projetada sobre a escala auxiliar. Se esta aproximar-se muito das extremidades, deve-se bloquear imediatamente o instrumento. Além disso, é necessária a operação de pré-orientação do giroteodolito. Esta consiste na colocação do instrumento numa direção próxima à do Norte giroscópico, denominada Norte aproximado. Quando se inicia um processo de pré-orientação, duas situações podem ocorrer (Nadal, 1982) :

- a) o ângulo formado entre o eixo de colimação do teodolito e a meridiana é maior que trinta ( $30^0$ ) graus e uma oscilação muito forte da marca de referência projetada na escala auxiliar pode ser observada, em um sentido. Procede-se

então da seguinte maneira: bloqueia-se rapidamente o giro pêndulo e gira-se a luneta no sentido da oscilação de aproximadamente trinta ( $30^0$ ) graus; libera-se novamente o giro pêndulo e observa-se nesta nova posição o deslocamento da marca de referência; procede-se assim até encontrar-se uma direção em que a marca diminua sua velocidade.

- b) o ângulo entre o eixo de colimação e a meridiana é de aproximadamente cento e oitenta ( $180^0$ ) graus. Neste caso a luneta está dirigida para as proximidades do ponto Sul e observa-se uma oscilação muito débil na marca da escala auxiliar. Aguarda-se a marca deslocar-se num só sentido, bloqueia-se o giro pêndulo e gira-se a alidade de cento e vinte ( $120^0$ ) graus no sentido do deslocamento da marca, agindo-se a partir daí como no item anterior.

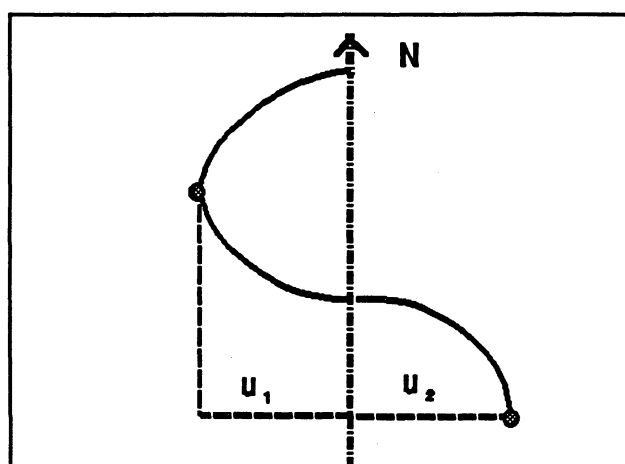
Uma bússola pode auxiliar este processo mas existem regiões onde, devido a interferências magnéticas regionais, tal auxílio na pré-orientação não pode ser utilizado.

A condição de pré-orientação exige que o eixo de colimação do giroteodolito forme um ângulo máximo de ( $\pm 30^0$ ) (WILD, [ca 1970]) com o Norte.

Uma vez solto o cilindro do mecanismo de bloqueio, e solto o teodolito para girar no plano horizontal, deve-se acompanhar o movimento de oscilação da marca de referência até que ela pare no ponto chamado de elongação máxima e inicie o movimento de oscilação em sentido contrário. Continua-se acompanhando o movimento da marca com o teodolito até que ela páre novamente e

recomece o movimento de oscilação no primeiro sentido. Este método rápido de pré-orientação utiliza estes pontos de elongação para o cálculo do Norte aproximado. Para isto, registra-se as leituras do limbo horizontal do teodolito ( $u_1$ ) e ( $u_2$ ) correspondentes aos pontos de elongação máxima, conforme mostra a fig(32).

FIGURA 32 - ORIENTAÇÃO RÁPIDA COM DOIS PONTOS DE ELONGAÇÃO MÁXIMA



A posição média entre estas duas extremidades fornecida pela eq.(149) fornece a direção do Norte aproximado( $N'$ ), para onde deve ser direcionado o giroteodolito para as observações precisas que darão origem à determinação do Norte giroscópico.

$$N' = \frac{1}{2} ( u_1 + u_2 ) \quad (149)$$

Presume-se que o giroteodolito está pré-orientado quando a marca de referência desloca-se lentamente e pode-se observar inversões em seu sentido de deslocamento. Espera-se que, após a pré-orientação, a diferença entre o Norte aproximado e o Norte giroscópico seja na ordem de  $\pm 10'$  a  $\pm 14'$  (WILD, [ca,1970]) caso

contrário haverá dificuldade de obter-se estas inversões na oscilação da marca de referência, assim como no estabelecimento de uma escala apropriada.

Neste sentido, existe uma dificuldade prática em controlar o cilindro do mecanismo de bloqueio, ora soltando-o, ora prendendo-o com a ponta dos dedos, até que a marca atinja o valor desejado na escala. Este é um problema que se apresenta para o operador iniciante no giroteodolito, que com alguns dias de trabalho pode ser superado. Assim, garante-se a habilidade e sensibilidade na operação pois, dependendo da velocidade com que a marca inicia seu movimento, consegue-se atingir ou não a amplitude desejável da escala.

### **3.6 O MÉTODO DAS PASSAGENS**

#### **3.6.1 Metodologia de Coleta de Dados e Análise**

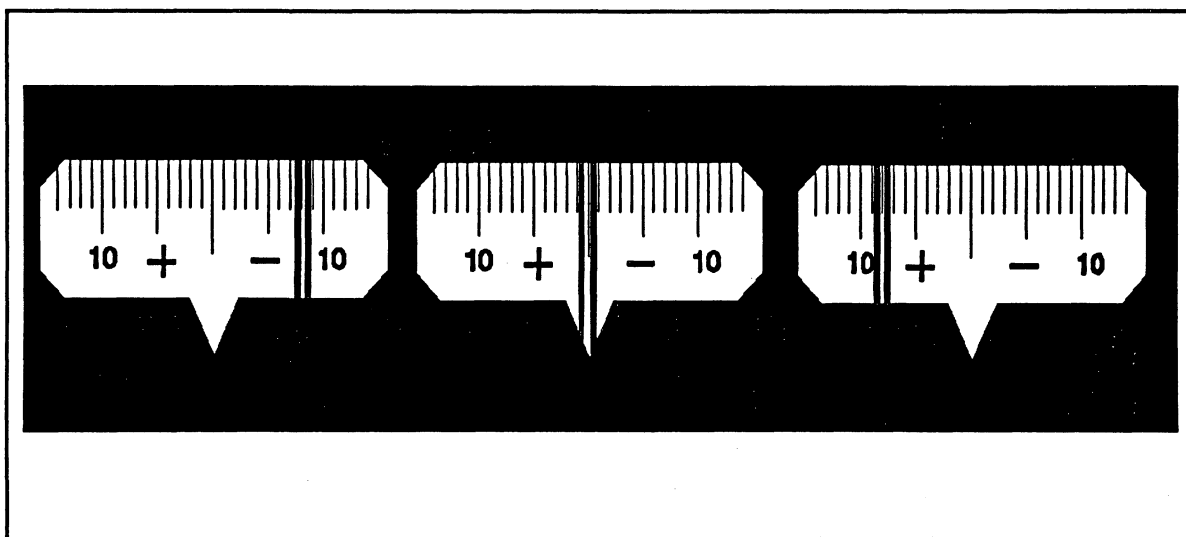
Uma vez efetuada a pré-orientação, observa-se que ao soltar-se o cilindro do mecanismo de bloqueio, a marca de referência começa a deslocar-se para um dos lados da escala. Diversos métodos podem ser aplicados nas determinações com o instrumento, com diferentes níveis de precisão. Em seu trabalho, Nadal(1982) descreve estes métodos e a precisão esperada em cada um deles.

Optou-se aqui pela utilização do Método das Passagens porque no trabalho de análise desenvolvido por Jeudy(1982), que

será posteriormente descrito, o Método das Passagens básico é utilizado mediante a introdução da automação total de coleta de dados. De mesmo modo, neste trabalho introduz-se o Método das Passagens Múltiplas Com Automação Parcial, e pretende-se compará-lo com estes outros.

Conforme já citado anteriormente, a condição para a aplicação do Método das Passagens é que o teodolito esteja orientado previamente em relação ao Norte giroscópico com aproximadamente  $\pm 10'$  a  $\pm 14'$ . Bloqueia-se a alidade do teodolito nesta direção do Norte aproximado ( $N'$ ) e libera-se o giropêndulo ou parte oscilante; lê-se as amplitudes máximas da marca de referência na escala auxiliar para ambos os lados, esquerdo(a+) e direito(a-) do centro, marcado com V, conforme pode-se observar na fig.(33).

FIGURA 33 - POSIÇÕES DA MARCA DE REFERÊNCIA



A seguir cronometra-se os instantes das passagens do centro da marca de referência, que aparece como um traço luminoso, pelo centro da escala ou zero. Deve-se anotar cuidadosamente se esta

marca está indo da esquerda para a direita, ou seja, do lado positivo para negativo da escala, ou da direita para esquerda, ou do lado negativo para o lado positivo da escala. Estes instantes serão anotados como  $(t_i)$ . Calcula-se então o intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas afim de obter-se o intervalo de tempo que a marca permaneceu no lado positivo da escala, e o intervalo de tempo que a marca permaneceu no lado negativo da escala. O objetivo desta operação é verificar-se qual a diferença entre os intervalos de tempo que a marca permaneceu em um lado e no outro, porque a determinação matemática do lado onde está situado o Norte giroscópico será função desta diferença, uma vez que há a tendência da marca para a direção deste Norte. Mais claramente, se esta diferença resultar positiva, significa que o Norte giroscópico estará à direita do Norte aproximado pois a imagem especular observada mostra os valores positivos à esquerda na escala auxiliar e, contrariamente, se esta diferença resultar negativa, significa que o Norte giroscópico estará à esquerda do Norte aproximado. Assim, matematicamente:

$$\Delta t_{u_i} = t_{i+1} - t_i \quad (150)$$

onde :  $\Delta t_{u_i}$  é o intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas pelo zero,

$t_i$  é o instantes cronométrico da  $i$ -ésima passagem pelo zero,

$t_{i+1}$  é o instante cronométrico da  $(i+1)$ -ésima passagem pelo zero.

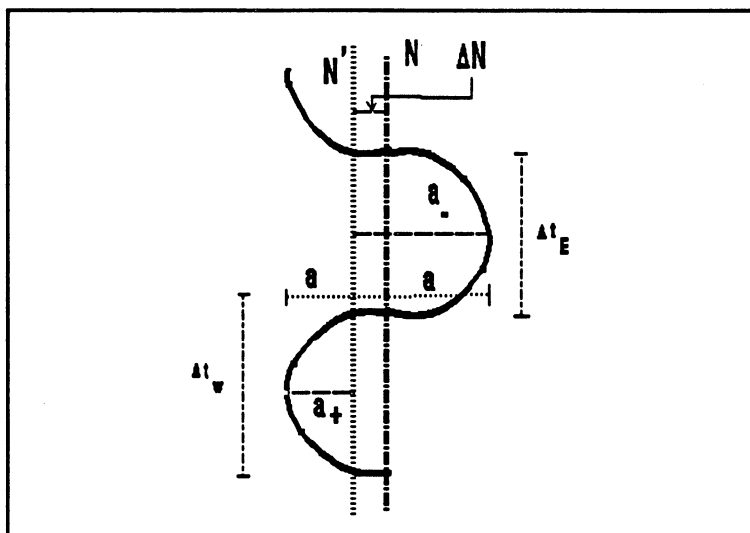


A fig.(34) ilustra este valor de  $\Delta t_{ui}$  e permite, tomando-se o eixo x como coincidindo com a direção do Norte aproximado (N') a fácil visualização desta diferença entre intervalos de tempo em um lado e no outro de N'. Uma vez calculados os  $\Delta t_{ui}$ , passa-se a calcular a diferença de tempo ( $\Delta t_i$ ) entre dois intervalos consecutivos, com o objetivo de verificar-se para qual lado tende a marca de referência, ou seja, a soma entre os intervalos pois um é positivo e o outro é negativo. Para facilitar o entendimento, denomina-se  $\Delta t_{ui} = \Delta t_E$  o intervalo de tempo que a marca permanece a leste (à direita) do zero e  $\Delta t_{ui} = \Delta t_W$  o intervalo de tempo que a marca permanece a oeste (à esquerda) do zero (ou lado positivo da escala). Então:

$$\Delta t_i = \Delta t_E + \Delta t_W \quad (151)$$

Conforme mostrado na fig.(34), existe uma proporcionalidade entre o ângulo formado entre as direções do Norte giroscópico(N) e aproximado(N') e o intervalo de tempo médio  $\Delta t_m$ . Este constitui-se na média entre os valores  $\Delta t_i$ .

FIGURA 34 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DAS POSIÇÕES DA MARCA DE REFERÊNCIA NO MÉTODO DAS PASSAGENS



A eq.(152) mostra esta relação, que atinge somente a parte linear da senóide. Assim,

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m \quad (152)$$

onde :  $a$  é a amplitude média da marca, registrada na escala;  
 $c$  é uma constante de proporcionalidade determinada empirica ou fisicamente e uma vez só para cada giroscópio e para cada estação;  
 $\Delta t_m$  é o intervalo de tempo médio ;  
 $\Delta N$  é a diferença entre a direção do Norte giroscópico e do Norte aproximado.

O valor de  $\Delta t_m$ , conforme introduzido anteriormente, é dado pela média aritmética entre os  $\Delta t_i$ , e o valor da constante de proporcionalidade para o instrumento utilizado nos experimentos deste trabalho, WILD T2/GAK-1/GKK-3:19143 é 3,03186"/s (Nadal,

1982). O valor da amplitude(a) pode-se considerar como estando em unidades da escala auxiliar, sendo que cada intervalo corresponde aproximadamente a 10' (ver Ap.3). Como a proporcionalidade entre a diferença de tempo média  $\Delta t_m$  e a correção  $\Delta N$  é válida apenas na parte linear da oscilação senoidal, a diferença de tempo não deveria ser superior a trinta segundos (30s) ou, para uma amplitude de  $\pm 10$  intervalos da escala auxiliar, a correção  $\Delta N$  não deveria ultrapassar o valor 15', caso contrário deveria-se efetuar uma segunda observação com uma direção de partida melhorada (WILD, [ca1970]). Esta especificação de manual, em termos destes 15' é compreensível pois este seria um ângulo correspondente ao extremo da oscilação ou no ponto de elongação o sistema oscilante tocar a parede externa e nela "colar", podendo ser encarado como um máximo. O Manual indica ainda que a amplitude de trabalho desejável é entre  $\pm 10$  a  $\pm 14$  na escala auxiliar. A soma de  $N'$  com  $\Delta N$  fornece a direção do Norte giroscópico.

$$N = N' + \Delta N \quad (153)$$

Observando-se ainda a fig.(34), pode-se verificar que ela apresenta um exemplo onde o Norte giroscópico está à direita do Norte aproximado. Então, como o limbo horizontal do teodolito percorre o plano horizontal no sentido horário, soma-se o  $\Delta N$ , que neste caso é positivo resultando matematicamente a direção do Norte giroscópico à direita no Norte aproximado. Se, ao contrário, o valor de  $\Delta N$  tivesse resultado negativo, ao efetuar-se a soma acima, resultaria um Norte giroscópico à esquerda do Norte aproximado.

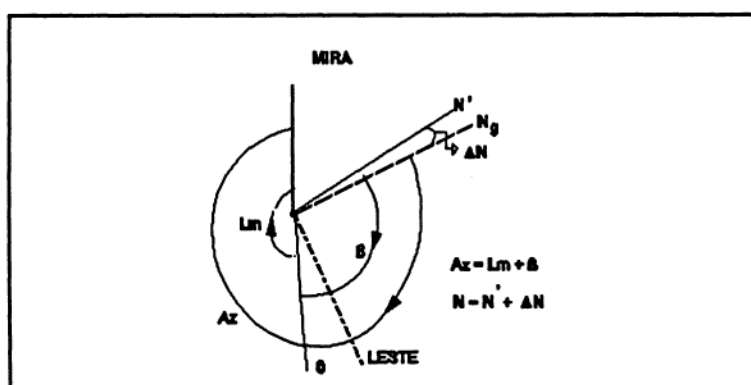
### 3.6.2 CARACTERÍSTICAS DO WILD GAK1 E EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Na oscilação do eixo de rotação do giroscópio, uma das características do movimento harmônico realizado por ele aparece claramente: a maior velocidade ocorre quando o giropêndulo está próximo da posição de equilíbrio (próximo ao zero da escala auxiliar), sendo máxima quando passa pela direção do Norte giroscópico (que não é conhecida) e, as menores velocidades ocorrem à medida que este se afasta desta posição de equilíbrio, até cessar no ponto de elongação máxima, quando ele para e reinicia o movimento em sentido contrário. Para uma longa série de medidas, o amortecimento sofrido pelo giropêndulo pode influenciar os valores dos intervalos de tempo ( $\Delta t_m$ ) anteriormente citados.

Para a compreensão das leituras efetuadas neste trabalho, estabeleceu-se o croquis mostrado na fig.(35) que mostra as direções utilizadas. A mira escolhida foi o colimador óptico do Laboratório de Aferição da UFPR, que foi utilizado em toda a parte experimental deste trabalho. Esta escolha foi norteada pelos propósitos deste, um dos quais é manter as condições de aquisição de dados estabilizadas, ou seja, o colimador óptico apresenta uma grande estabilidade física como mira. Por outro lado, em um ambiente confinado as condições de trabalho podem ser consideradas próximas às reais porque apresenta semelhança às de, por exemplo, minas ou florestas densas, onde não se tem idéia da posição do Sol e, conseqüentemente, da direção do Norte. Outro aspecto muito importante é que, ao efetuar-se medidas dentro de um ambiente como

o do Laboratório de Aferição de UFPR, que é bem isolado térmicamente do exterior, tem-se a possibilidade de avaliar-se o comportamento do instrumento sem grande influência de fatores externos como vento, incidência de raios solares, umidade, etc. Isto garante as chamadas condições de Laboratório, minimizando principalmente a influência da temperatura sobre a cinta de suspensão do giroscópio.

FIGURA 35 - CROQUIS COM AS DIREÇÕES UTILIZADAS NA DETERMINAÇÃO DE AZIMUTE DA MIRA



Além dos fatos citados anteriormente, realizando-se leituras da posição da mira em PD (posição direta) e PI (posição inversa) garante-se a eliminação dos erros de colimação, inclinação e excentricidade. Não consegue-se, entretanto, eliminar-se os erros de horizontalismo do nível e de graduação do limbo horizontal do teodolito. Por isto, posteriormente, serão feitas algumas séries com reiteração, ou seja, percorrendo-se todo o limbo horizontal do teodolito.

Dentre as várias séries realizadas, uma é apresentada como exemplo no quadro de valores a seguir, para mostrar como se aplica o Método das Passagens.

TABELA 01 - EXEMPLO DO CÁLCULO DE AZIMUTE PELO MÉTODO DAS PASSAGENS COM O USO DE CRONÔMETRO MANUAL

Data : 14/09/93                      Norte aproximado(N'): 250°16'28,70"

Hora : 13h 45min                      Leitura da mira (L<sub>m</sub>): 182°22'15,10

i	sinal	t <sub>i</sub>		Δ t <sub>ui</sub> (s)		Δ t <sub>i</sub> amplitude	
		min	s	min	s	s	a
1	-p/+	1	40,5	+ 3	14,0	+ 13,5	+11,4
2	+p/-	4	54,5	- 3	00,5	+ 13,2	-10,2
3	-p/+	7	55,0	+ 3	13,7	+ 13,2	_____
4	+p/-	11	08,7	- 3	00,5	+ 13,5	10,8
5	-p/+	14	09,2	+ 3	14,0	+ 13,7	
6	+p/-	17	23,2	- 3	00,3	+ 13,7	
7	-p/+	20	23,5	+ 3	14,0	_____	
8	+p/-	23	37,5			+ 13,47	

Cálculos: Δ t<sub>m</sub> = 13,47 s ; a<sub>m</sub> = 10,8 ; c = 3,03186 "/s

Δ N = c . a . Δ t<sub>m</sub> = 441,0638654 " = 7 . 21,06 "

N = N' + Δ N = 250 °23 ' 49,7 "

B = 360° - 250°23'49,7" = 109°36'10,2"

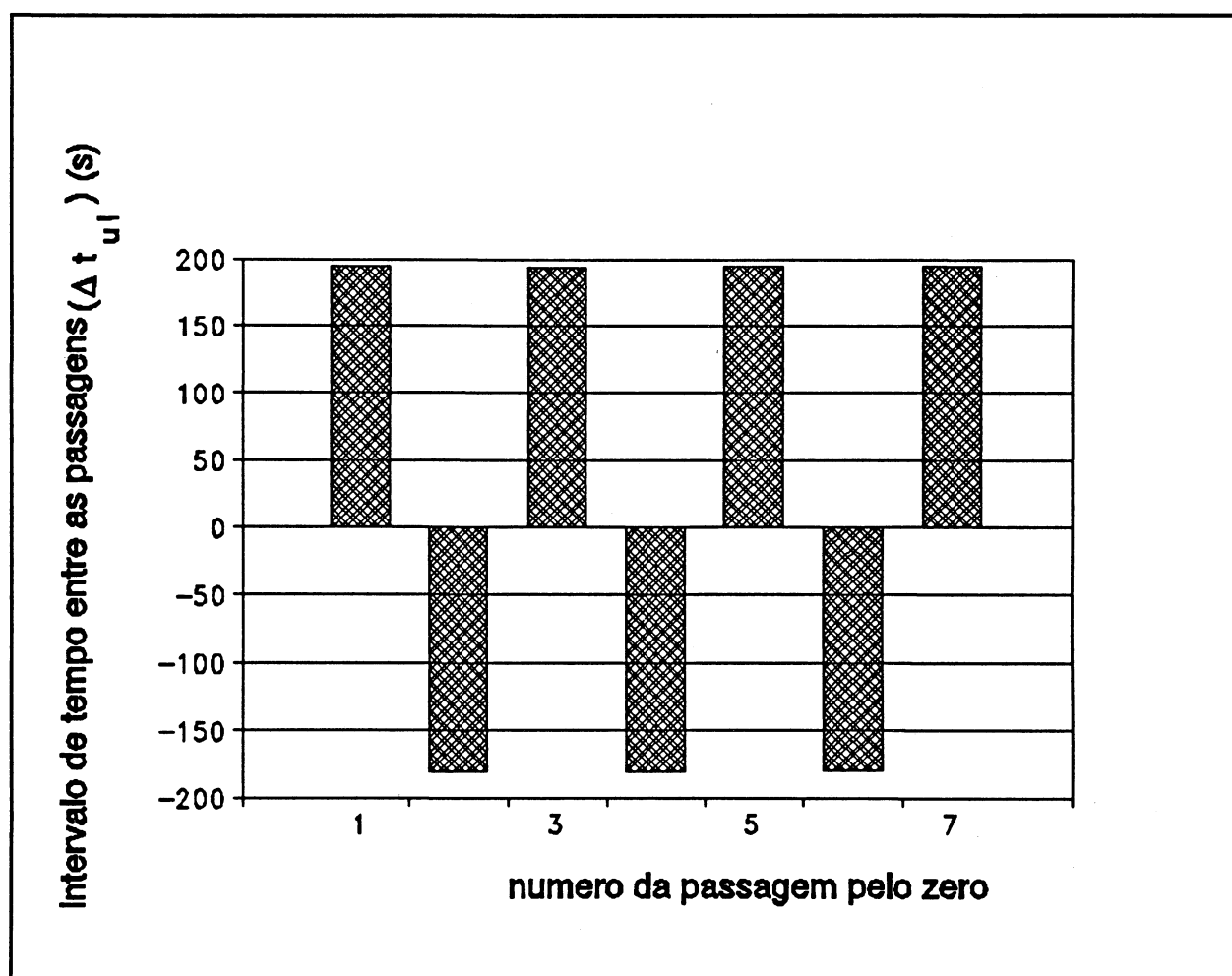
A<sub>z</sub> = B + L<sub>m</sub>

A<sub>z</sub> = 291°58'25,3"

obs: Azimute contado a partir do Norte por Leste

As diferenças de tempo  $\Delta t_{ui}$  que representam o intervalo de tempo que a marca permaneceu em cada lado da escala auxiliar são representados na fig.(36), em segundos, contra o número da passagem, de modo a permitir uma visualização que, realmente, a marca auxiliar permanece mais tempo em um lado da escala, no caso o lado positivo, que sabe-se que é o que contém o Norte giroscópico.

FIGURA 36 - DIAGRAMA MOSTRANDO A AMPLITUDE DE TRABALHO



### 3.6.3 Síntese do método das Passagens

O método das passagens foi desenvolvido para determinações da meridiana em locais com problemas de intervisibilidade e pode ser facilmente aplicado, implicando em cerca de 30 minutos de operação em cada ponto. O erro médio azimutal predito pelo fabricante é 20" de arco ( $1\sigma$ ), conforme mostrado no Ap.3, porém trabalhos práticos em minas tem indicado 30" ou mais (Chzranowski, 1978).

### 3.6.4 Análise crítica ao método

A aplicação do método das passagens permite a ocorrência de muitos erros observacionais. Isto se deve ao fato de a coleta de medidas basear-se unicamente nos reflexos do operador. Mais claramente, este deve observar visualmente a marca que acompanha o movimento do eixo de rotação do giroscópio, para registrar as passagens pelo zero da marca na escala auxiliar de medidas. Quando esta passagem ocorre, o operador deve então travar um cronômetro manual e ler os segundos acumulados de movimento do eixo. Ocorre, que o tempo de reação do ser humano gira em torno de 0,7 s (Halliday & Resnick, 1991), o que por si só implica na introdução deste fator de tempo em todas as medidas. Como elas são cumulativas, nas subtrações de intervalos de tempo ( $\Delta t_{ui}$ ), este fator de reação tende a não influenciar os intervalos porque está sistematicamente introduzido nas medidas. Mas o tempo que o



operador leva para acionar o cronômetro manualmente não pode ser desconsiderado, pois pode ser diferente nas diferentes passagens. Deste modo, pode-se criticar no método o fato de depender totalmente do operador. As maiores fontes de erro estão no acionamento do cronômetro e nas leituras efetuadas com este. Como são poucas as medidas tomadas, ou seja, não ocorre um ajustamento de dados que permita diluir esta influência do operador, cresce proporcionalmente sua influência nos resultados obtidos.

### **3.7 MÉTODO DAS PASSAGENS MÚLTIPLAS DE JEUDY**

#### **3.7.1 Introdução**

No início deste capítulo foram citados, de modo sucinto, alguns trabalhos que tratavam da mecânica do giroscópio. Para a compreensão da metodologia de aperfeiçoamento das equações de movimento estabelecida por Jeudy(1981) e a sua posterior aplicação prática no Método das Passagens Múltiplas mediante a automatização da coleta de amostras, é necessário aprofundar-se um pouco mais o histórico das obras sobre o assunto. Neste sentido, vai-se sintetizar o trabalho de cada autor, para compará-lo ao trabalho de Jeudy (1981 e 1982) de modo a estabelecer progressos e diferenças entre os diversos trabalhos.

### 3.7.2 Histórico comparativo de trabalhos sobre a Mecânica do Giroscópio

Já por décadas o giropêndulo suspenso tem sido utilizado para a determinação do Norte giroscópico, tendo sido, portanto, objeto de vários trabalhos.

Deve-se ter sempre presente que giropêndulo é o conjunto rotor e motor elétrico do giroscópio, que estão contidos num recipiente, daqui para a frente denominado carter. Este conjunto (incluindo-se o carter) está suspenso por uma cinta, cujas características técnicas estão apresentadas no Ap.3. Quando libera-se o mecanismo de bloqueio, o giroscópio passa a somar dois movimentos distintos, o movimento giroscópico do rotor, e o movimento pendular do conjunto carter, rotor e motor elétrico, conforme descrito anteriormente. O movimento resultante é a sobreposição destes dois movimentos. Deve-se ainda levar em consideração o fato de o giroscópio estar ligado ao teodolito através de uma ponte de fixação e, por conseguinte, à Terra.

No trabalho clássico de Deimel(1950), por ser anterior ao desenvolvimento do giroteodolito, não foi levado em consideração o fato de o giroscópio estar suspenso pela cinta e dentro do carter. Em trabalhos posteriores, Grafarend(1967), e Vanicek (1972), desenvolveram a teoria mas não explicaram satisfatoriamente a pequena oscilação, da ordem de 1 segundo que pode ser observada a olho nú sobreposta à oscilação principal, da ordem de 7 minutos, no movimento do eixo de rotação do giroscópio. Esta pequena oscilação não fora até esta época ainda descrita teóricamente no modelo das

equações de movimento do instrumento. Vanicek sugeriu então a modelagem destas oscilações por uma senóide amortecida, mas foi considerado que o eixo de rotação do giroscópio permaneceria contido no plano horizontal. Embora em determinado ponto do trabalho seja feita a consideração que isto poderia não ocorrer e, considerada matematicamente esta possibilidade, Vanicek baseou o trabalho na consideração que o eixo de rotação não realizaria movimento espacial.

Posteriormente, Schultz(1975) desenvolveu um modelo levando em conta o fato do giroscópio estar suspenso, mas negligenciando a força de Coriolis devido à rotação da Terra em alguns pontos. Devido a isto, embora apresentasse um desenvolvimento bem estruturado do conjunto das equações de movimento do giroscópio, inclusive descrevendo sua posição espacial, a sua teoria não foi bastante precisa para fins geodésicos.

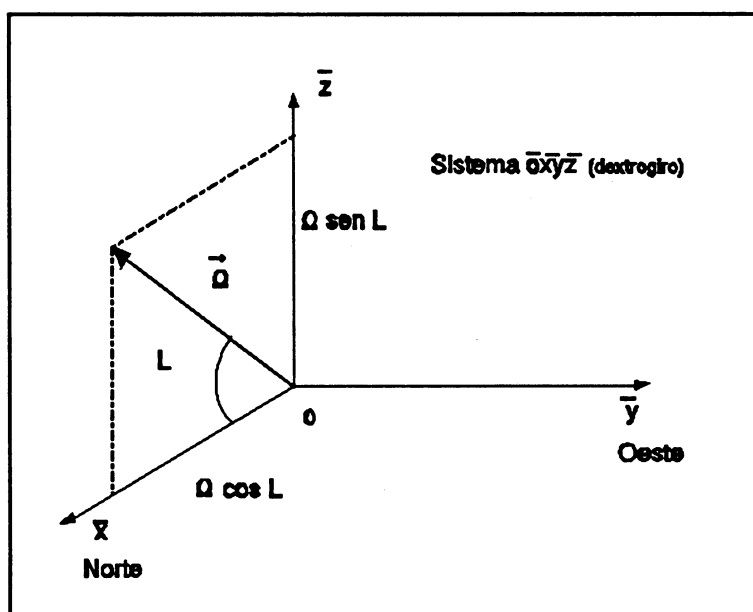
Foi portanto no trabalho de Jeudy(1981) que finalmente estabeleceu-se um modelo teórico mais preciso para o movimento giropendular do instrumento, pois levou em conta o fato de o rotor estar contido no carter e, estarem ambos suspensos (e não entre anéis) através de uma cinta sujeita a trações, torções, etc.. Com isto, as coordenadas deste ponto inferior da cinta (ponto I da fig(38)) por onde o carter é suspenso podem variar, além do fato de este ponto realizar um movimento espacial. De maneiras diferentes em suas formulações matemáticas, Schultz e Jeudy mostraram teoricamente a existência das pequenas oscilações.

Em seu trabalho, Jeudy(1981) não negligenciou nenhuma força, só fazendo uma fraca aproximação no nono dígito da força centrífuga devida à rotação da Terra. Utilizando-se dos ângulos de Euler para descrever o movimento espacial do conjunto carter mais rotor, ele montou um sistema de equações com cinco graus de liberdade. São estes, duas coordenadas da extremidade suspensa da cinta, que definem a posição do conjunto carter e rotor em relação a um sistema de eixos não inerciais topocêntrico, e os três ângulos de Euler. No processo de dedução de novas equações, afim de determinar-se os 5 parâmetros descritos acima, ao contrário de Schultz, Jeudy não realizou uma linearização, mas sim aplicou os princípios da Mecânica Clássica baseado em Goldstein(1959). A seguir, aos poucos, foram sendo introduzidas novas funções desconhecidas como a tensão na cinta, a velocidade angular do rotor em relação ao carter e a terceira coordenada do ponto de suspensão da cinta (I na fig.(38)). Deste modo, procurou levar em conta todos os fatores que poderiam influenciar determinações com o giroteodolito. Com isto, obteve como resultado, oito equações diferenciais não lineares de 2ª ordem que não podem ser resolvidas explicitamente por soluções analíticas, tal o seu grau de complexidade. Estas são fundamentais para a determinação da posição de equilíbrio aparente do giropêndulo e para a dedução das equações das pequenas oscilações.

### 3.7.3 Descrição sucinta dos procedimentos adotados por Jeudy no cálculo das equações de movimento do giroscópio

Algumas considerações gerais devem ser inicialmente feitas. O sistema de referência inercial não fica explícito no trabalho, mas adota-se um sistema com origem no centro de massa da Terra e eixos de referência orientados para as estrelas fixas. Um sistema de eixos topocêntrico dextrógiro  $\bar{o}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  fixo em relação à crosta terrestre é estabelecido como um sistema não inercial com velocidade angular  $\vec{\Omega}$  constante em relação ao sistema inercial. Neste sistema, o eixo  $\bar{o}\bar{z}$  tem sentido inverso ao do vetor aceleração da gravidade  $\vec{g}$  e  $\bar{o}\bar{x}\bar{z}$  definem o plano do meridiano astronômico do ponto  $o$ . A fig.(37) mostra este sistema de eixos.

FIGURA 37 - SISTEMA DE EIXOS FIXO EM RELAÇÃO À CROSTA



Define-se também um outro sistema  $Gxyz$ , fixo em relação ao carter (C) e também não inercial. Este possui uma velocidade angular

instantânea em relação a  $\overset{---}{\text{oxyz}}$  dada por  $\overset{\sim}{\omega}_G$ . O eixo  $Gx$  é o eixo de rotação do giroscópio. Assim, a velocidade angular instantânea absoluta do carter em relação ao referencial inercial será:

$$\tilde{\omega}_c = \tilde{\Omega} + \tilde{\omega}_g \quad (154)$$

Na realidade, em seu trabalho, Jeudy diferencia os vetores que dependem da orientação do sistema de referência, dos vetores ordinários que não dependem do sistema de referência. Neste sentido, as derivadas das grandezas vetoriais tal como posição, velocidade etc, em relação ao tempo, são denominadas absolutas e estão relacionadas ao sistema inercial. Porém de modo geral, as componentes destas grandezas ou são expressas em relação ao sistema não inercial  $Gxyz$ , fixo em relação ao carter, ou em relação ao sistema  $\overset{---}{\text{oxyz}}$ . Devido ao fato de estar-se fazendo aqui uma apreciação geral do método de trabalho introduzido por Jeudy, todos os vetores serão tratados conforme o trabalho original, ou seja sempre que o símbolo  $\overset{\sim}{\phantom{x}}$  estiver sobre o vetor, significa a dependência deste da orientação do sistema de eixos, enquanto o símbolo  $\vec{\phantom{x}}$  mostra a ocorrência de um vetor ordinário.

Considere-se agora o sistema de eixos  $Gx'Y'Z'$  ligado ao giroscópio, com origem no centro de  $\overset{---}{\text{gravidade deste(G)}}$ , e cujos eixos são respectivamente paralelos a  $\overset{---}{\text{oxyz}}$ . Sejam ainda  $\psi$ ,  $\nu$  e  $\phi$  os ângulos de Euler formados pelo sistema  $Gxyz$  com relação a  $Gx'Y'Z'$ . Então os elementos geométricos fundamentais do giroscópio suspenso podem ser representados esquematicamente como na fig.(38).



No Apêndice 4 apresenta-se de forma simples a definição dos ângulos de Euler, que permitem o cálculo espacial da posição do giroscópio. Com esta construção, o mesmo constitui-se num sólido de revolução(G) que gira em torno de um eixo, solidário ao carter, fixado em I, cujas coordenadas são, no sistema  $oxyz$ ,  $x_1, y_1, z_1$ , ou seja, estas são as coordenadas da extremidade da cinta por onde se suspende o sistema giroscópio e carter. Assim, pode-se resumir a marcha dos procedimentos adotados por Jeudy(1981) para calcular as equações de movimento do giroscópio, e que procuram contemplar todas as possibilidades de movimento relativo entre as partes componentes do sistema, com os seguintes passos:

- 1) calcula-se o momento angular (absoluto) do carter(C) e do giroscópio (G) em relação ao ponto I ( $\vec{H}_I^c$ );
- 2) calcula-se e exprime-se o momento angular total do conjunto giroscópio e carter(C e G) em relação a  $Gxyz$ ; ( $\vec{H}_I = \vec{H}_I^c + \vec{H}_I^g$ ) onde este último é o momento angular do giroscópio em relação ao ponto I);
- 3) calcula-se o torque (momento das forças externas ao sistema, que atuam sobre o giroscópio e carter,  $\vec{M}_{fe} \setminus I$ ) derivando-se o momento angular total calculado no item anterior;
- 4) obtém-se uma equação que explicita o torque exercido pelas forças exteriores dentro das três equações de Euler modificadas para levar em conta a suspensão. Devido ao fato de estar-se trabalhando com velocidades e acelerações absolutas, considerou-se como forças externas a atração



gravitacional devida à Terra e outros corpos celestes, a tensão na cinta e às forças devido à torção na cinta;

- 5) o momento de cada uma destas forças externas é calculado e introduzido na expressão da derivada do momento angular total. As fórmulas então obtidas representam as três equações de Euler;
- 6) após realizar-se um certo número de reduções e introduzir-se as componentes dos diferentes vetores, obtém-se a expressão final das equações de Euler. A quarta equação é indicada à parte e exprime o fato de o ponto de suspensão I deslocar-se espacialmente como uma esfera de raio  $\rho$  e centro em  $\bar{A}$ , de acordo com a fig.(38). Assim, supõe-se o comprimento do fio como constante;
- 7) estas quatro equações não são suficientes para determinar-se as funções desconhecidas, que são  $x_1, y_1, z_1, \psi, \phi, \nu$  e  $n$ , onde este último é a componente do vetor velocidade angular do giroscópio  $\vec{G}$  em relação ao carter  $C$  ( $\vec{n}$ ); na direção de  $G_x$ , sendo as outras componentes deste vetor nulas;

Alguns cálculos são realizados a seguir devido à sua utilidade para uma futura linearização. Neste sentido, calcula-se as componentes de  $\vec{w}_G$  em  $GX'Y'Z'$  e  $Gxyz$ . Na seqüência:

- 8) calcula-se as componentes de  $\vec{\Omega}$  em  $Gxyz$  e obtém-se três novas equações; aplica-se então o teorema do movimento do centro de massa do sistema completo  $G$  e  $C$  (2ª Lei de Newton para um sistema de partículas) e explicita-os na forma vetorial.

Neste ponto, aparece então uma incógnita, suplementar, o módulo da tensão da cinta de suspensão  $|T|$ . Com isto, são oito as incógnitas:  $x_1, y_1, z_1, \psi, \phi, \nu, n$  e  $|T|$ ;

- 10) uma equação suplementar é obtida aplicando-se o teorema do momento angular apenas ao giroscópio;
- 11) finalmente as oito equações obtidas são colocadas juntas de forma explícita. Estas equações são fundamentais para os cálculos posteriores pois a partir deste sistema é possível determinar-se a posição de equilíbrio aparente do instrumento, levando-se em consideração que a posição de torque nulo da cinta é exatamente sobre a meridiana instantânea (com o eixo  $Gx$  sobre ela). Uma vez estabelecida esta meridiana giroscópica, é possível determinar-se o azimuth giroscópico da direção de uma mira.

Um caso geral, útil na prática, é aquele em que considera-se a posição de torque nulo correspondente a um ângulo  $\epsilon_0$  formado entre a direção do eixo do giroscópio e a meridiana ou linha Norte-Sul. Assim este ângulo passa a ser uma incógnita determinada experimentalmente comparando-se por um lado as posições do giroscópio em equilíbrio e por outro lado as posições do giroscópio girando. A seguir procede-se a uma linearização das equações de modo a permitir-se a obtenção de um sistema de cinco equações lineares com cinco incógnitas, após a eliminação de três incógnitas. As cinco coordenadas restantes são as coordenadas do ponto I,  $x_1$  e  $y_1$  e os três ângulos de Euler.

O sistema obtido é comparável a Schultz(1975). Entretanto, duas diferenças importantes aparecem. O sistema de Schultz se divide em dois sistemas separados, sendo que um deles permite calcular-se os três parâmetros de posição do carter(C) independentemente das coordenadas do ponto I. A solução à qual se conduz os sistemas apresentam-se na forma de uma soma de três componentes periódicas :

$$\sum_{i=1}^3 A_i \cos w_i t + B_i \sin w_i t \quad (155)$$

onde  $A_i$  e  $B_i$  são as amplitudes,  $t$  o tempo e  $w_i$  as frequências.

No trabalho de Jeudy tal separação não aparece e conduz-se o problema a uma solução da forma:

$$\sum_{i=1}^5 C_i \cos p_i t + D_i \sin p_i t \quad (156)$$

onde existem cinco componentes periódicas. Pode-se atribuir tal diferença ao fato de Schultz haver negligenciado as forças de Coriolis. O fato é que constatou-se diferenças numéricas significativas entre as duas soluções.

Na segunda parte de seu trabalho, Jeudy(1982), após o estabelecimento do sistema de equações não lineares de movimento a que se refere o passo 11, procedeu o cálculo da posição de equilíbrio aparente. Os valores dos parâmetros para esta posição de equilíbrio foram obtidos a partir das equações de movimento fazendo suas derivadas iguais a zero. Obteve-se então um sistema de oito

equações com oito incógnitas escalares o qual pode ser reduzido a um sistema de seis equações para os parâmetros  $\psi, \phi, \nu, \theta, \lambda$  e  $|T|$ , respectivamente os três ângulos de Euler do carter, as duas coordenadas angulares para o ponto de suspensão e a tensão da cinta.

As equações de movimento na vizinhança da posição de equilíbrio, linearizadas por séries de Taylor, permitiram obter um sistema de cinco equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e cinco funções desconhecidas no tempo. Este sistema pode ser resolvido por eliminação das funções desconhecidas permanecendo duas equações diferenciais de sexta ordem.

A solução apresenta raízes puramente imaginárias e que correspondem a cinco períodos para as pequenas oscilações do girocompasso suspenso em torno da posição de equilíbrio. Todas as funções desconhecidas são derivadas explicitamente e dependem de dez constantes de integração.

No caso em que leva-se em conta o amortecimento, o processo de derivação é semelhante, e permanece uma equação característica de grau dez com todas as potências dos valores desconhecidos, pares e ímpares. No caso, as raízes são calculadas pela fórmula de Newton-Raphson com argumento complexo.

Os procedimentos práticos para a determinação do Norte e para avaliação da precisão da teoria aqui descrita, foram apresentados em Jeudy(1982). Neste, uma análise espectral por mínimos quadrados é aplicada a séries temporais determinadas pelo método das passagens, obtidas com um giroscópio suspenso WILD GAK1

equipado eletronicamente com três fotocélulas ligadas a um cronógrafo registrador.

Ao invés de aplicar-se as transformadas de Fourier da função de autocovariança, como para Jeudy seria usual na análise espectral destas séries (teoria de Wiener), a função espectral que ele utiliza é um estimador do fator de variância obtido após um ajustamento dos dados a uma senóide, por mínimos quadrados.

Esta função é normalizada para valores entre zero e um. Procede-se então a uma análise espectral por mínimos quadrados passo a passo, ou seja, cada vez que uma freqüência significativa aparece no espectro, ela é removida pelo ajustamento aos dados de uma senóide, por mínimos quadrados. Esta senóide inclui um coeficiente de amortecimento. Uma vez removida esta freqüência, os resíduos são novamente examinados em termos da análise espectral por mínimos quadrados.

Utilizando-se deste procedimento, Jeudy conseguiu determinar quatro freqüências significativas. Ao bem conhecido movimento de oscilação principal, com período de cerca de 7 minutos, somaram-se outros. São eles, respectivamente, um movimento com período aproximadamente de metade do período principal e amplitude de cerca de 70", e dois movimentos remanescentes de amplitudes muito menores (2.9" e 0.9").

O período de cerca de metade do principal pode ser explicado levando-se em conta termos de 2ª ordem na teoria desenvolvida por Jeudy. Os períodos correspondentes às pequenas oscilações são de cerca de 0.0218 s e 0,496 s. O primeiro pode ser

associado a uma componente de alta frequência, e já fora previsto teóricamente de maneira aproximada por Deimel(1950) e Grafarend(1967). Este termo tem sido desprezado nas determinações experimentais devido à sua pequena intensidade. Isto ocorre porque, embora Jeudy tenha conseguido determiná-lo experimentalmente, e demonstrado que este valor não deveria ser negligenciado, permanece a dificuldade experimental de obtê-lo por outra metodologia que não a desenvolvida pelo próprio Jeudy mediante a utilização de fotocélulas atreladas ao cronógrafo registrador.

A segunda pequena oscilação, de período de cerca de 0,496 s, pode ser considerada como correspondente à rápida oscilação("wobble") que pôde ser observada a olho nú mesmo na parte experimental deste trabalho e que perturba o movimento oscilatório como um todo.

#### 3.8.4 Síntese do método

É importante neste momento realizar-se uma síntese dos trabalhos de Jeudy (1981,1982) sobre determinações múltiplas com o giroteodolito porque neles somaram-se dois procedimentos que os valorizam. A um profundo e cuidadoso trabalho teórico para estabelecimento rigoroso das equações de movimento do eixo de rotação do giroscópio, aliou-se um método de coleta de dados totalmente automatizado, onde as fotocélulas registram a passagem do eixo por pontos da escala de leitura auxiliar. Esta informação é passada a um cronógrafo, que registra o instante cronométrico

desta passagem. Com isto, o método por ele desenvolvido permite a determinação rigorosa das frequências componentes do movimento oscilatório amortecido do eixo de rotação do giroscópio. Os tempos podem ser registrados com precisão de  $\pm 0,001$  s na resolução (EMR,1975) e foram utilizadas três fotocélulas que registraram séries com vinte e cinco medidas dos instantes cronométricos correspondentes a passagens por estas fotocélulas. O curioso do trabalho é que a análise espectral não foi realizada sobre os dados obtidos diretamente, mas sobre sucessivas séries de resíduos obtidos após o ajustamento por mínimos quadrados de modelos que contém uma ou mais componentes periódicas com coeficientes de amortecimento e outros parâmetros como a janela das fotocélulas.

### 3.7.5 Análise crítica ao método

Nas determinações experimentais realizadas no campo com o instrumento WILD GAK-1, em condições reais de uso, o método de Jeudy não pode ser aplicado por uma série de motivos. O principal deles é o alto custo da transformação para incorporação das fotocélulas. Além disto, o transporte do conjunto equipado com fotocélulas, juntamente com o cronógrafo, requerem muito cuidado. Sabe-se por outro lado, que os locais em que se faz necessária a utilização de giroteodolitos para determinação da meridiana, são geralmente de difícil acesso, como túneis, florestas densas, subterrâneos, etc. Assim, mais ainda torna-se difícil em termos práticos utilizar-se a metodologia de automação de coletas

introduzida por Jeudy, embora os resultados tenham uma precisão muito melhor, de cerca de 3" de erro na determinação de azimute (Halmos, 1977). Além disto, o trabalho teórico sobre o qual se baseia o método apresenta um contexto matemático, tanto em termos de conceitos de Mecânica, quanto em termos da notação adotada, extremamente complexo e difícil. Assim, embora possua notável valor em termos de precisão, o método permanece distante da aplicabilidade e pode ser considerado como exclusivamente acadêmico.

### **3.8 O método de automação parcial**

#### **3.8.1 Introdução**

Neste trabalho procurou-se desenvolver um novo método de coleta de dados e de análise de dados que permitisse a automação parcial do processo de coleta com o conseqüente aumento de precisão, mas que tivesse viabilidade de aplicação prática e imediata. Neste sentido, o objetivo maior deste trabalho é permitir uma melhor aplicabilidade para os giroteodolitos já em operação sem modificações construtivas. Por outro lado, o método permite explorar-se aspectos importantes, como a análise da estrutura do sinal senoidal composto que descreve as amplitudes do eixo de rotação do giroscópio no domínio do tempo, e a sua transformação para o domínio das freqüências.



### 3.8.2 A tomada de medidas temporais

O processo de coleta de dados temporais é sem dúvida a chave deste método. A montagem do sistema teodolito-giroscópio se faz de maneira similar à descrita no início deste capítulo. Porém, junto ao operador, ao alcance de suas mãos, deve ser montada uma pequena plataforma sobre a qual coloca-se um microcomputador portátil (tipo Notebook, Leptop, etc), previamente programado com o programa CHORA (Ap.6), ou similar. Este, deve permitir acionar o relógio interno do microcomputador ao toque de teclas pré-selecionadas. A bateria do microcomputador deve suportar operar o instrumento de forma contínua por pelo menos uma hora. Não foi realizada aqui a consideração sobre a marcha do relógio, nem a propagação de erros ligados a flutuações internas deste sobre as medidas temporais realizadas. Num futuro trabalho poderia-se introduzi-las como um 5º parâmetro no ajustamento senoidal a que se procede no item 4.3.5..

Uma vez observada a primeira oscilação na lupa de observação do movimento do eixo de rotação do giroscópio, e anotados os valores da amplitude à esquerda( $a_1$ ) e à direita( $a_2$ ), pode-se iniciar a coleta de dados. No programa aqui utilizado, optou-se por fornecer o valor da primeira amplitude inteira a ser registrada, aguardando-se a passagem da marca por ela, e o próprio programa constrói as amplitudes seguintes inclusive com os sinais. Se o sentido é da esquerda para a direita, os valores diminuirão em módulo, com o sinal + até o zero, quando passarão a aumentar em

módulo com o sinal -. Para esta construção de amplitudes é necessário informar-se cada vez ao computador este sentido de oscilação via códigos pré-programados. Um exemplo de como se apresenta o conjunto de dados assim registrados está colocado no Apêndice 5.

### 3.8.3 A análise dos dados

Os dados obtidos durante o trabalho são analisados com o intuito de comparar-se a precisão obtida nos diferentes procedimentos. Com isto é possível avaliar o método nos seus diversos aspectos.

Assim, após a coleta das séries temporais, conforme descrito no item anterior, adota-se os seguintes procedimentos distintos de análise dos dados (visando esgotar todas as possibilidades):

- a) determinação do azimute giroscópico da mira escolhida, pela aplicação do Método das Passagens tradicional, mediante a extração dos instantes cronométricos das passagens pelo zero, sem levar em conta os outros dados temporais referentes aos outros instantes cronométricos de passagens da marca auxiliar pelos diversos pontos da escala de leituras;
- b) ajustamento de um polinômio de grau zero à série temporal obtida, ou seja, uma reta paralela ao eixo dos tempos e que representa a direção do Norte giroscópico. Este procedimento corresponde a uma aplicação do mesmo Método das Passagens,

porém com uma densidade de dados muito maior que no item a). O coeficiente linear desta reta corresponde à separação entre a direção do Norte aproximado e do Norte giroscópico. Este coeficiente linear transformado para medida angular possibilita a determinação do azimute da direção da mira;

- c) ajustamento de uma função senoidal aos dados obtidos nas diversas séries pelo método paramétrico, afim de obter-se os valores ajustados a todo o conjunto de dados. Assim, obtém-se os valores ajustados do período do movimento do eixo de rotação do giroscópio, dos parâmetros que descrevem o movimento senoidal, bem como da separação entre o Norte aproximado e o Norte giroscópico ajustado de cada série ( $\Delta N$ ). Em consequência, pode-se calcular a direção do azimute giroscópico da direção da mira. Para a seleção de séries, aplica-se um teste estatístico do tipo  $\chi^2$  às séries temporais obtidas. Assim pode-se avaliar e rejeitar aquelas que não se ajustem ao modelo matemático escolhido ou que contenham erros grosseiros em medidas. Nas conclusões deste trabalho serão feitas sugestões quanto ao tamanho das séries, e procedimentos diversos. Os resultados desta determinação de azimute no domínio do tempo, permitem uma avaliação da precisão de cada medida ("precision") e uma estimativa de precisão do método ("accuracy").
- d) uma análise dos zeros da função senoidal ajustada é feita também para verificar-se a qualidade do ajustamento.
- e) a análise dos dados amostrais no domínio das frequências é feita pela aplicação de uma transformada de Fourier sobre estes

dados temporais equi-espçados e com "smoothing". Assim, identifica-se as freqüências componentes do sinal senoidal acima da freqüência crítica de Nyquist. Uma vez avaliada a distribuição de energia nas diversas freqüências, pode-se determinar o valor dos períodos componentes correspondentes e comparar-se os resultados obtidos com os obtidos mediante o ajustamento descrito no item c).

- f) procede-se ainda a uma análise espectral dos resíduos do ajustamento dos dados à função senoidal, equiespaçados e com "smoothing". Este procedimento é realizado para tentar-se levantar outras freqüências às quais exista energia associada.
- g) confecção de programas para a realização dos procedimentos aqui descritos, tais como aquisição de dados, ajustamento senoidal, interpolação polinomial, análise de Fourier e análise da concentração da densidade de potência espectral nas diversas freqüências.

No próximo capítulo detalha-se estes passos e realiza-se a análise crítica detalhada ao método.

## CAPÍTULO IV

### ANÁLISE DOS DADOS

#### 4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão analisados os dados obtidos com o giroteodolito WILD GAK-1. Inicialmente avalia-se estimativa de precisão de três conjuntos de dados obtidos com o Método das Passagens e um cronômetro manual, seguindo a metodologia tradicional. Depois avalia-se a estimativa de precisão dos dados obtidos utilizando-se o microcomputador como cronógrafo, porém pela aplicação do Método das Passagens de acordo com o indicado pelo manual. O ajuste polinomial aos dados amostrais de uma reta que representa a direção do Norte giroscópico é realizado a seguir. O intuito é comparar-se os valores da separação entre o Norte aproximado e o Norte giroscópico(AN) obtidos no ajuste polinomial, com os obtidos pela aplicação tradicional do método das Passagens.

Na sequência realiza-se o ajustamento senoidal dos dados, pelo método paramétrico, também objetivando determinar a separação AN e estimar-se a precisão do método, uma vez que considera-se todas os dados temporais obtidos. Este ajustamento permite também criar-se um critério de rejeição de séries pela aplicação do teste estatístico de  $\chi^2$ .

Finalizando este capítulo, transforma-se os dados temporais amostrais para o domínio das frequências, pela aplicação

de procedimentos inerentes à Análise Espectral por Fourier, introduzidos no Cap.II. Como resultado, compara-se a frequência obtida com a resultante do ajustamento no domínio do tempo. Na busca de outras frequências componentes, realiza-se também a análise espectral dos resíduos do ajustamento senoidal.

Os resultados finais permitem a formulação de uma série de conclusões e recomendações que são apresentadas no Cap.V.

#### 4.2 DETERMINAÇÃO DO AZIMUTE GIROSCÓPICO DA MIRA PELO MÉTODO DAS PASSAGENS UTILIZANDO-SE UM CRONÔMETRO MANUAL

##### 4.2.1 Dados obtidos

Para determinar-se o azimuth giroscópico da mira, ou seja, o colimador óptico do Laboratório de Aferição da UFPR, pela metodologia tradicional do Método das Passagens, com cronômetro manual, foram trabalhados três conjuntos de dados. Estes foram obtidos a partir de medidas realizadas em épocas diferentes durante os anos de 1992 e 1993. Os dados completos estão apresentados no Anexo I, exceto os do primeiro conjunto. Estes, estão sintetizado a seguir:

##### DATA DA OBSERVAÇÃO

##### AZIMUTE GIROSCÓPICO

20/02/92	291° 59' 31,00"
04/03/92	291° 58' 54,00"
04/03/92	292° 01' 02,00"
04/03/92	292° 00' 34,00"
30/04/92	291° 59' 25,00"
30/04/92	291° 59' 47,00"

$$A_z = 291^\circ 59' 52,10''$$

---


$$\sigma_{n-1} = \pm 0^\circ 0' 47,49''$$

O resumo do 2º conjunto de dados obtidos é o seguinte:

**DATA DA OBSERVAÇÃO****AZIMUTE GIROSCÓPICO**

4/09/92	292° 02' 22,34"
4/09/92	292° 02' 24,41"
4/09/92	292° 02' 22,23"
4/09/92	292° 02' 29,79"
4/09/92	292° 02' 15,36"
4/09/92	292° 02' 00,72"

---


$$\overline{A_z} = 292^\circ 02' 19,14'' \quad \sigma_{n-1} = \pm 0^\circ 00' 10,31''$$

e o do 3º conjunto de dados é :

**DATA DA OBSERVAÇÃO****AZIMUTE GIROSCÓPICO**

10/09/93	291° 58' 13,90"
13/09/93	291° 58' 26,40"
14/09/93	291° 58' 55,40"
14/09/93	291° 58' 24,50"
14/09/93	291° 58' 25,30"
14/09/93	291° 58' 18,00"

---


$$\overline{A_z} = 291^\circ 58' 29,00'' \quad \sigma_{n-1} = \pm 0^\circ 00' 15,48''$$

onde:

$$\sigma_{n-1} = \pm \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (157)$$

sendo  $x_i$  os  $i$ -valores da amostra,  $\bar{x}$  a média amostral e  $n$  o tamanho da amostra.

O agrupamento por conjuntos foi feito de acordo com a época de tomada de medidas. Portanto, ocorreu reinstalação do instrumento. No primeiro conjunto observa-se que o desvio-padrão  $\sigma_{n-1}$  é maior do que nos outros. Observe-se que houve discrepâncias

significativas entre os resultados, da ordem de 4'. Estas mostram as diferenças comportamentais que podem ocorrer entre orientações repetidas, da ordem de minutos de arco, já apontadas por Chrzanowski (1969).

#### 4.2.2 Cálculo do azimuth giroscópico da mira

Tendo-se uma população de médias dadas pelas médias de cada conjunto de dados, pode-se dizer que o valor médio representativo da direção do azimuth da mira é a média ponderada destes valores, ou seja:

$$A_{zm} = 292^{\circ} 00' 13,41''$$

e a variança deste conjunto de médias será:

$$s_m^2 = \frac{s_1^2 \times (n_1 - 1) + s_2^2 \times (n_2 - 1) + s_3^2 (n_3 - 1)}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + (n_3 - 1)} \quad (158)$$

onde  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  são o número de elementos de cada conjunto e  $s_1^2$ ,  $s_2^2$ , e  $s_3^2$  são as varianças das amostras, ou seja, o quadrado dos desvios padrões  $\sigma_{n-1}$ . Assim,

$$\sigma_m = (s_m)^{1/2} = 0^{\circ} 00' 29,42''$$

Observe-se que apesar da diferença comportamental observada, este valor médio de desvio padrão é próximo ao preconizado pelo fabricante, 20" (ver Apêndice 4) e por usuários, 30" (Lauf&Gregerson, 1969)



#### 4.3 DETERMINAÇÃO DO AZIMUTE GIROSCÓPICO DA MIRA PELO MÉTODO DAS PASSAGENS UTILIZANDO O RELÓGIO DO MICROCOMPUTADOR COMO CRONÓGRAFO

##### 4.3.1 Introdução

Procedendo-se à tomada de dados referentes aos instantes correspondentes às passagens do eixo de rotação do giroscópio, pelos pontos da escala auxiliar, obtém-se séries temporais com intervalos de tempo não equiespaçados. Estes representam a posição do eixo nas diversas amplitudes do movimento senoidal por ele descrito. Este procedimento foi descrito no item 3.8.2.

O aspecto fundamental a ser ressaltado neste processo de tomada de medidas temporais, é que ela é apenas parcialmente automatizada porque utiliza como cronógrafo o microcomputador, aceitando como suficientemente estável o relógio deste. Entretanto, é o operador do instrumento que procede às leituras na escala auxiliar do instrumento, acompanhando as passagens da marca auxiliar pelos pontos da escala. É este operador também quem informa o microcomputador a cada ponto de interesse. Neste sentido, todos os problemas referentes a erros observacionais ligados a um operador humano permanecem e devem ser considerados na avaliação do método.

A partir destes conjuntos de dados, gerados através do programa CHORA.FOR (Ap.6), extrai-se em um primeira análise somente os valores referentes às passagens pelo zero afim de verificar-se

qual a precisão obtida na determinação da direção do azimute da mira. Com isto, pode-se avaliar o quanto a simples introdução, na tomada de dados, do relógio do microcomputador com precisão de 0,01s (desconsiderando a marcha deste relógio), modifica a precisão desta determinação de azimute.

Um cuidado a ser tomado é a realização de aquisição de dados correspondentes a um número completo de oscilações, para evitar distorções no ajustamento posterior destes dados.

Deve-se ter ainda presente que, embora façam parte de conjuntos superabundantes de dados referentes a todas as passagens pelas diversas amplitudes do movimento giroscópico, o número de dados referentes às passagens pelo zero é pequeno, o que implica em baixa densidade observacional.

Outro ponto importante, é que a análise feita neste item segue a tradicional aplicação e os cálculos do método das Passagens, estando portanto a ele restrita em termos de precisão.

#### **4.3.2 Dados Obtidos**

Foram realizadas 36 séries temporais, das quais 2 foram abandonadas devido à disparidade entre os  $\Delta t_i$  (sec 20 e sec 33) e duas apresentaram problemas durante a aquisição devido a perturbações externas ao processo de coleta (sec 6 e sec 7), desviando a atenção do operador. Uma outra série (sec13) apresentou comportamento atípico e as últimas séries foram realizadas reiterando o limbo horizontal do teodolito. Uma observação

importante neste processo é que a partir de 40 minutos de aquisição começa a tornar-se insuportável ao operador o processo, pela fadiga natural devido à atenção necessária no processo. A Tabela 02 a seguir contém os resultados referentes à análise destas séries pelo Método das Passagens, baseados nos cálculos apresentadas no Anexo II.

A partir das 36 séries de aquisição de dados denominadas sec, de comprimentos variáveis, espera-se uma descrição fiel do comportamento do instrumento. Em termos de tempo de aquisição, existem séries muito curtas, como as séries sec3 e sec4, as de médio tamanho, em torno de 30 a 40 minutos e as longas, de cerca de uma hora, como a série sec5. Estes dados são utilizados em todos os trabalhos de análise realizados aqui.

Quanto ao período de realização destas séries, foi concentrada no final do mês de setembro e durante o mês de outubro de 1993, para garantir condições físicas externas semelhantes em termos de temperatura, pressão, etc.

A Tabela 2 mostra também os resultados obtidos para o azimute da direção da mira para as diversas séries, utilizando-se apenas as passagens da marca de referência pelo zero da escala auxiliar de leituras. Realiza-se o cálculo do desvio percentual dos  $\Delta t_i$ , ou seja, quantos por cento estes se afastaram do valor médio, para se ter uma idéia da estabilidade dos dados de cada série.

TABELA 02 - RESULTADOS OBTIDOS PELO MÉTODO DAS PASSAGENS COM  
O RELÓGIO INTERNO DO MICROCOMPUTADOR COMO CRONÓGRAFO

Série	Azimuth(girosc.) da mira	desvio dos $\Delta t_i$ (%) $d_x = \sigma_{n-1}/\Delta t_m \cdot 100\%$
SEC1	291° 58' 23,60"	1,38
SEC2	291° 58' 03,39"	1,56
SEC3	291° 58' 12,10"	0,60
SEC4	291° 57' 57,40"	2,50
SEC5	291° 58' 21,40"	3,77
SEC6	abandonada	
SEC7	abandonada	
SEC8	291° 58' 16,10"	0,97
SEC9	291° 58' 51,90"	0,85
SEC10	291° 58' 45,80"	0,86
SEC11	291° 58' 41,70"	0,53
SEC12	291° 58' 52,90"	1,33
SEC13	291° 58' 55,90"	1,43
SEC14	291° 58' 13,90"	0,65
SEC15	291° 59' 04,22"	1,20
SEC16	291° 59' 24,90"	1,09
SEC17	291° 59' 07,05"	9,34
SEC18	291° 59' 11,40"	6,57
SEC19	291° 59' 39,50"	11,14
SEC20	abandonada	
SEC21	291° 58' 26,70"	4,47
SEC22	291° 58' 56,80"	3,44
SEC23	291° 58' 54,40"	3,92
SEC24	291° 58' 51,60"	3,93
SEC25	291° 58' 04,99"	4,54
SEC26	291° 59' 36,70"	11,12
SEC27	291° 58' 56,80"	3,30
SEC28	291° 59' 09,67"	3,78
SEC29	291° 59' 53,80"	10,43
SEC30	291° 58' 46,70"	6,58
SEC31	291° 58' 33,80"	15,96
SEC32	291° 58' 46,28"	4,18
SEC33	abandonada	
SEC34	291° 58' 49,90"	4,16
SEC35	291° 58' 36,70"	7,08
SEC36	291° 59' 08,32"	5,11

### 4.3.3 Análise dos dados

Procedendo-se à análise dos dados mostrados na Tabela 02, inicialmente considera-se todas as séries, exceto as já abandonadas "a priori" por problemas de leitura. Assim, obtém-se:

$$A_z = 291^\circ 58' 49,49'' \quad \text{e} \quad \sigma_{n-1} = \pm 27,64''$$

A precisão obtida, mesmo sem estabelecer critério para rejeição de séries, já é melhor que a obtida no item 4.2.2 onde utiliza-se apenas o cronômetro manual, e que é de  $\pm 29,42''$ .

Entretanto, pode-se observar que existem séries que tem um desvio percentual dos intervalos de tempo  $\Delta t_i$  em relação à média ( $\Delta t_m$ ) mais elevado que outras. Utilizando-se então este desvio como base para uma avaliação da estabilidade dos dados temporais, construiu-se a Tabela 03.

TABELA 03 - ERRO NA DETERMINAÇÃO DE AZIMUTE PARA DIFERENTES DESVIOS PERCENTUAIS DOS  $\Delta t_i$

Critério	Azimute médio	$\sigma_{n-1}$	n° de séries restantes
$d \leq 10\%$	$291^\circ 58' 42,50''$	$0^\circ 00' 23,39''$	28
$d \leq 5\%$	$291^\circ 58' 39,20''$	$0^\circ 00' 23,78''$	23
$d \leq 4\%$	$291^\circ 58' 40,70''$	$0^\circ 00' 24,00''$	19
$d \leq 3\%$	$291^\circ 58' 35,60''$	$0^\circ 00' 26,70''$	13
$d \leq 2\%$	$291^\circ 58' 39,90''$	$0^\circ 00' 24,37''$	12
$d \leq 1\%$	$291^\circ 00' 30,20''$	$0^\circ 00' 18,57''$	6

Observa-se neste quadro que, segundo este critério de análise baseado no desvio percentual dos  $\Delta t_i$  em relação ao valor médio, a precisão das determinações permanece aproximadamente constante e maior que 20", apesar de restringir-se o número de séries analisadas em função do critério. Apenas o último valor, de 18,57" denota uma precisão maior, e corresponde a um conjunto de 6 séries estáveis com 76 passagens pelo zero.

Entretanto, pode-se realizar a análise estatística das 32 séries de dados utilizando-se a mediana. Neste sentido, obtém-se como média dos valores centrais da distribuição ordenada dos resultados de azimutes fornecido pela séries,  $291^{\circ} 58' 50,70''$  e pode-se construir uma tabela de freqüência com que ocorrem os azimutes (Tabela 04). Assim,

TABELA 04 - FREQUÊNCIA DE OCORRÊNCIA DE AZIMUTES PELO MÉTODO

Classes 291°	freqüência
57' 40"•--- 58' 00"	1
58' 00"•--- 58' 20"	5
58' 20"•--- 58' 40"	5
58' 40"•--- 58' 60"	12
59' 00"•--- 59' 20"	5
59' 20"•--- 59' 40"	3
59' 40"•--- 59' 50"	1

A mediana é dada por:

$$M_e = L_i + \frac{P - f_a}{f_{M_e}} \times h \quad (159)$$

onde:  $L_i$  é o limite inferior da classe que contém a mediana;

$$P = \sum_{i=1}^k \frac{f_i}{2} = \frac{32}{2} = 16 \quad (160)$$

sendo:  $f_s$  = frequência acumulada da classe anterior à da mediana = 11

$f_{Me}$  = frequência da classe mediana = 12

$h$  = amplitude da classe mediana = 20"

de modo que:

$$\begin{aligned} M_e &= 291^\circ 58' 40'' + \frac{16 - 11}{12} \times 20'' = 291^\circ 58' 48,40'' + 8,333'' \\ &= 291^\circ 58' 48,33'' \end{aligned}$$

Uma vez que segundo o Manual (Wild, ca[1970]) o erro médio na determinação azimutal é de  $\pm 20''$  de arco em condições ideais, adota-se aqui como critério de seleção de séries, este afastamento da mediana. Assim, seleciona-se as séries em que:

$$291^\circ 58' 28,33'' < A_z < 291^\circ 59' 8,33''$$

ou seja, as séries sec9, sec10, sec11, sec12, sec13, sec15, sec17, sec22, sec23, sec24, sec27, sec30, sec31, sec32, sec34, sec35, sec36. Assim o valor médio do azimute da direção da mira será então:

$$A_m = 291^\circ 58' 51,80'' \quad \text{e} \quad \sigma_{n-1} = \pm 9,86''$$

#### **4.4 CÁLCULO DO AZIMUTE DA DIREÇÃO DA MIRA POR AJUSTAMENTO POLINOMIAL DE UMA RETA AO DADOS**

##### **4.4.1 Introdução**

Um procedimento adicional que pode ser realizado operando com o conjunto de dados temporais é o ajustamento a estes de um polinômio de grau zero. Ou seja, ajustando-se uma reta do tipo  $y = K$ , onde esta constante representa a distância em unidades da escala auxiliar entre o valor aproximado do Norte  $N'$  e a posição do Norte giroscópico. Isto ocorre porque, o zero das leituras de amplitudes, lidas na escala auxiliar, ocorre quando o giroscópio está na direção de  $N'$ . Entretanto, o conjunto de dados na realidade mostram a oscilação em torno da direção do Norte giroscópico  $N$ . Assim, ao ajustar-se ao conjunto de dados, uma reta do tipo acima estabelecido, pode-se obter a separação entre estas duas direções, desde que conhecida a proporção entre unidades da escala auxiliar e a amplitude em unidades de escala. Um cuidado a ser tomado é a realização de períodos completos de oscilação.

##### **4.4.2 Considerações sobre o comportamento mecânico do instrumento**

Um fato a ser ressaltado é o aspecto teórico de considerar-se exatamente como posição zero correspondente à direção  $N'$ . Às vezes, ao soltar-se o giropêndulo observa-se um pequeno deslocamento inicial da posição deste em relação ao zero da escala auxiliar de leituras. Czranowski(1969) estudou este DRIFT



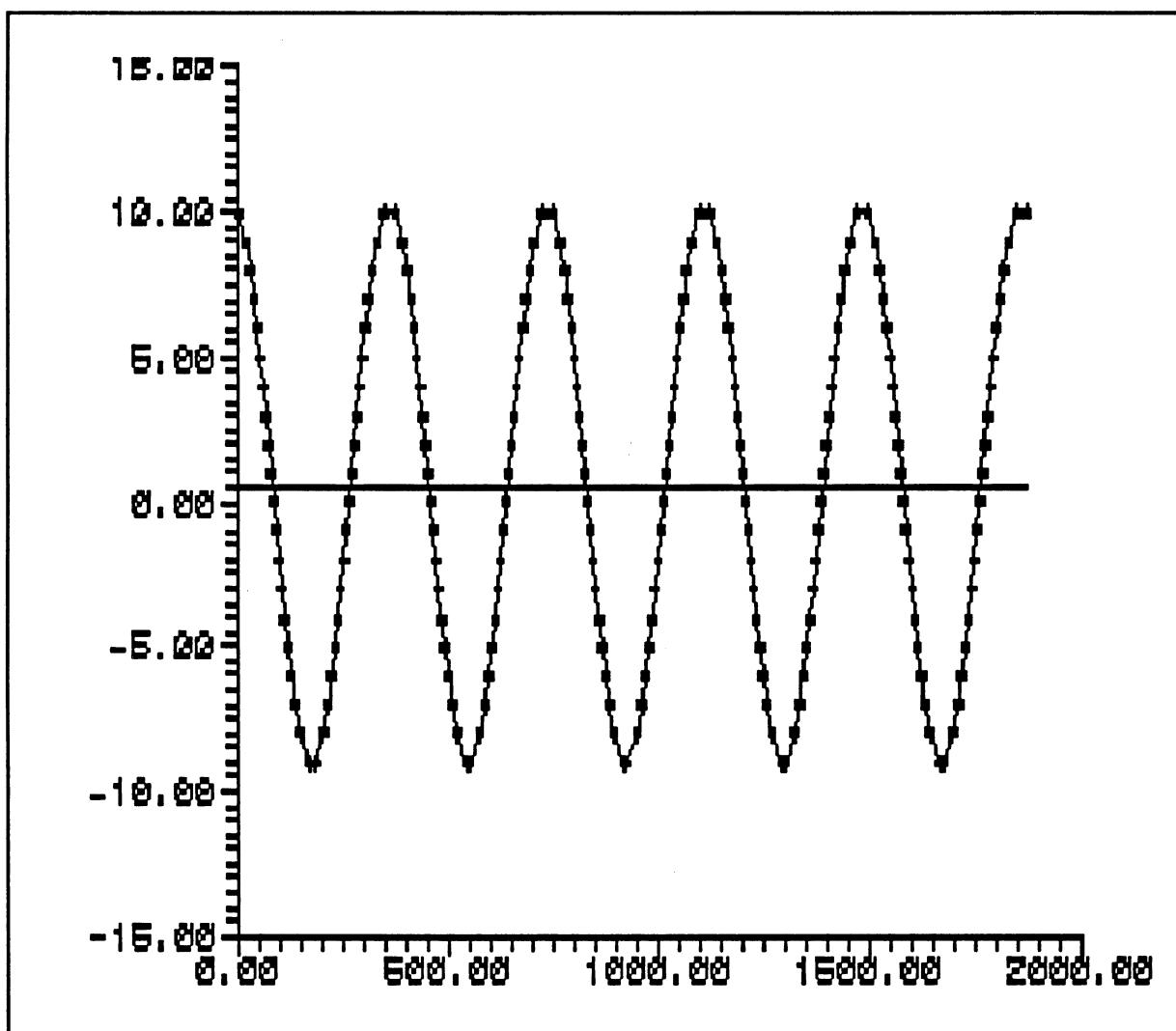
instrumental e concluiu que o mesmo surge por influências internas devidas a características internas do instrumento, tais como fricção nos rolamentos, viscosidade dos lubrificantes, variação da estrutura molecular da cinta de suspensão e ressonância devido a imperfeições no balanceamento do rotor. Para o GAK-1 este DRIFT influencia apenas observações de longo período (mais de 24 horas), embora variações cíclicas menores ocorram entre 1,5 horas e 3,0 horas de leituras. Para contornar este problema, as determinações temporais neste trabalho não excederam 1,3 horas.

O instrumento sofre também variações sazonais das constantes de calibração do instrumento ao longo do ano, devido às variações do sistema de suspensão do giroscópio atreladas à variação da pressão, temperatura, etc.. Novamente, para contornar estes, neste trabalho, o processo de tomada de dados que foi concentrado em determinações ao longo um mês e meio, foi realizado dentro do Laboratório de Aferição da UFPR, onde as condições de operação são bastante estáveis.

#### **4.4.3 Ajuste Polinomial de uma reta**

Considerando-se todos os dados temporais obtidos nas diversas séries procede-se à construção gráfica destes dados e ao seu tratamento estatístico, do qual a fig.(39) é um exemplo.

FIGURA 39 - AJUSTAMENTO POLINOMIAL DE GRAU ZERO AOS DADOS  
DE UMA SÉRIE TEMPORAL OBTIDA COM GIROTEODOLITO



Tanto a construção representando o movimento senoidal espacial do eixo de rotação do giroscópio, quanto o tratamento estatístico dos dados, foram feitos através do software GRAPHER. Observe-se que os resultados da análise estatística fornecem o valor de constante  $K$  em unidades da escala auxiliar. Estes resultados constam na Tabela 05.

TABELA 05 - MOSTRA OS RESULTADOS DO AJUSTAMENTO POLINOMIAL DE\*  
GRAU ZERO AOS DADOS TEMPORAIS DAS DIVERSAS SÉRIES

série	nº de pontos	coef. polinomial de grau zero	Δ N
sec1	201	0,5472640	5' 31,00"
sec2Di1	221	0,5475110	5' 28,51"
sec3	121	0,5785120	5' 49,90"
sec4	81	0,6172840	6' 13,35"
sec5Di5	185	-0,9523610	-5' 36,12"
sec8	267	2,0337100	20' 30,03"
sec9Di2	181	1,5469600	15' 28,18"
sec10Di2	195	1,8410300	18' 24,62"
sec11	267	2,0337100	20' 30,04"
sec12Di3	272	1,1771200	11' 46,27"
sec14Di3	179	1,6592200	16' 35,54"
sec15Di1	201	1,5472600	15' 28,36"
sec16	201	1,5472600	15' 35,82"
sec17Di1	266	0,0337079	0' 20,22"
sec18Di4	151	0,0331126	0' 19,87"
sec19Di5	153	0,0588235	0' 35,29"
sec21Di2	185	0,0594595	0' 35,69"
sec22Di3	183	0,1803280	1' 48,19"
sec23Di2	161	0,5155280	5' 09,32"
sec24Di1	129	0,5348840	5' 20,93"
sec25Di1	175	0,2514290	2' 30,86"
sec26Di1	241	0,0346320	0' 20,78"
sec27Di1	241	0,5352700	5' 21,16"
sec28	241	0,5311200	5' 21,23"
sec29Di1	93	0,5000000	5' 00,00"
sec30Di2	151	0,0588235	0' 35,29"
sec31Di2	99	0,2268040	2' 16,08"
sec32Di1	201	0,5422890	5' 25,37"
sec34Di1	161	0,5465840	5' 27,95"
sec35Di1	181	0,3020130	3' 01,21"
sec36Di1	153	0,0588235	0' 35,29"

\*Di são séries selecionadas de acordo com o item 4.5.4.1..

Os valores obtidos na terceira coluna representam o valor de K ou ΔN em unidades da escala auxiliar. Esta é a distância entre a reta que passa pelo ponto  $y = 0$ , ou seja, que materializa a direção do Norte aproximado  $N'$ , e o ponto sobre o eixo y onde foi ajustada uma reta aos dados, representando a direção de N ou Norte

giroscópico. Na última coluna apresenta-se os valores angulares correspondentes para o  $\Delta N$ .

#### 4.4.3.1 Considerações sobre a transformação de unidades da escala auxiliar para minutos de arco

A transformação efetuada para obter-se esta última coluna utiliza a relação entre uma unidade da escala auxiliar e o n° de segundos de arco correspondente para a latitude de observação. Segundo o manual do instrumento (Wild, ca[1970]), uma unidade lida na escala corresponde a aproximadamente 10' de arco. Entretanto, o efeito do torque exercido pela cinta sobre o giroscópio deve ser sempre considerado, e é determinante para obter-se este valor com uma maior precisão. Muitos trabalhos como Halmos(1977), Vanicek(1972), Vanicek(1986) mostram o cuidado que se deve tomar, em função da latitude do ponto de observação, com a atuação deste torque. Schwendener(1966) mostra como determinar-se esta constante instrumental, o que foi realizado por Nadal(1980) para diversas latitudes no Brasil, aplicando-se :

$$C_1 = \frac{1}{2} m \left( 1 + \frac{\chi_0}{\cos \phi} \right) \quad (161)$$

onde:  $\chi_0$  é o fator de torção da cinta,  
 $m$  é o valor angular de um intervalo na escala auxiliar,  
 $\phi$  é a latitude do ponto de observação.

O valor do fator de torção da cinta é constante,  $\approx 0,17$  para o

GAK-1, e deriva do cálculo do fator  $k$  de Halmos(1977). Este, por sua vez é estabelecido através da relação entre o torque exercido pela cinta( $T_g$ ) e o torque exercido pela Terra( $T_g$ ) sobre o giroscópio, ou seja,

$$k = \frac{T_g}{T_g} \quad (162)$$

onde  $T_g$  é dado pela eq.(127) e  $T_g$  é dado por Landau(1965):

$$T_g = \frac{G d h^3}{3 l} \quad (163)$$

sendo :  $G$  o módulo de torção [ $M L^{-1} T^{-2}$ ] da cinta,  
 $d$  a largura da cinta [ $L$ ],  
 $h$  a espessura da cinta [ $L$ ],  
 $l$  o comprimento da cinta [ $L$ ].

Como para pequenos ângulos em radianos,  $\sin A \approx A$ , a eq.(127) pode ser expressa também como:

$$T_g = I_g w_g w_T \cos(\phi) A \quad (164)$$

donde obtém-se que :

$$\chi_0 = \frac{(G d h [3 l]^{-1})}{I_g w_g w_T A} \quad (165)$$

de modo que  $k = \chi_0 / \cos \phi$ . Em Nadal(1980) encontra-se uma tabela que estabelece a variação de  $C_1$  com a latitude, donde por interpolação obtém-se  $C_1(^{\circ}) = 5,94137^{\circ}$ , para a latitude de  $25^{\circ}26'52''S$ . Assim substituindo-se na eq.(161) vem:

$$5,9417' = \frac{1}{2} m \left( 1 + \frac{0,17}{\cos 25^{\circ} 26' 52''} \right)$$

donde obtém-se  $m = 10,00006662'$  de arco correspondendo a cada unidade da escala auxiliar para a latitude do ponto de observação. Este valor pode ser aproximado para  $10,00007''$  de arco.

#### 4.4.3.2 Cálculo do azimute da direção da mira pelo ajuste polinomial da reta ao conjunto de dados

Os valores do azimute da direção da mira podem agora ser calculados; os resultados para o conjunto de séries selecionadas está apresentados na Tabela 06.

TABELA 06 - AZIMUTES DA DIREÇÃO DA MIRA PARA AS DIVERSAS SÉRIES\*

série	Azimute	série	Azimute
sec1	292° 00' 13,60"	sec19Di5	291° 59' 59,40"
sec2di1	292° 00' 16,09"	sec21Di2	292° 02' 27,81"
sec3	291° 59' 51,70"	sec22Di3	291° 59' 32,00"
sec36Di1	292° 02' 20,11"	sec23Di2	291° 57' 08,93"
sec5Di5	292° 05' 36,12"	sec24Di1	291° 57' 11,00"
sec8	291° 58' 25,00"	sec25Di1	292° 00' 10,64"
sec9Di2	292° 02' 37,92"	sec26Di1	292° 02' 29,47"
sec10Di2	291° 59' 47,80"	sec27Di1	291° 57' 25,30"
sec11	292° 00' 34,47"	sec28	291° 57' 05,36"
sec12Di3	291° 59' 53,20"	sec29Di1	291° 57' 56,70"
sec14Di3	292° 00' 06,56"	sec30Di2	292° 01' 39,21"
sec15Di1	292° 01' 35,14"	sec31Di2	292° 00' 22,42"
sec16	291° 59' 29,90"	sec32Di1	291° 56' 45,00"
sec17Di1	292° 00' 13,53"	sec34Di1	291° 59' 29,20"
sec18Di4	292° 00' 14,88"	sec35Di2	292° 02' 20,11"

\* Foram excluídas as séries sec5Di5 e sec32Di1 do cálculo

$$A_{zm} = 291^{\circ} 59' 56,80'' \quad \text{e} \quad \sigma_{n-1} = \pm 16' 19,69''$$

que é um valor bastante alto, revelando uma dispersão muito grande. Supondo-se novamente como critério de limitação de séries o erro médio de 20" preconizado pelo manual para a determinação de azimute, obtém-se:

$$291^{\circ} 59' 38,60'' < A_z < 292^{\circ} 00' 18,60''$$

Ou seja, as séries selecionadas são sec1, sec2Di1, sec3, sec10Di2, sec12Di3, sec14Di3, sec17Di1, sec19Di5 e sec25Di1. Com isto, obtém-se como valor médio do azimute da direção da mira,

$$A_m = 292^{\circ} 00' 04,74'' \quad \text{e} \quad \sigma_{n-1} = \pm 11,32''$$

## 4.5 AJUSTAMENTO DOS DADOS NO DOMÍNIO DO TEMPO

### 4.5.1 Introdução

Diversos trabalhos tem sido dedicados à busca do modelo matemático que descreva o movimento senoidal que o eixo de rotação do giroscópio descreve por longo tempo em torno da direção do Norte giroscópico. Dentre estes, Dedeoglu(1977) estabeleceu um modelo que considera o suave amortecimento da senóide com o tempo. Por sua

vez, Vanicek(1986) trata o problema utilizando um modelo matemático que não leva em conta este amortecimento do movimento do eixo, mas para isto, restringe o tempo de tomada de dados a cerca de 28 minutos, com a realização de duas séries de medidas simétricas em relação à posição de torção zero da cinta. Esta, por sua vez, é indicada como a mais adequada (melhor) para este tipo de coleta. Os resultados obtidos por Vanicek são comparados com os obtidos por Halmos(1977). Neste último, foram usados dois fotodiodos para, em quatro passagens temporais por período, determinar-se separação  $\Delta N$  entre o Norte aproximado e o Norte giroscópico. Nele utiliza-se entretanto uma fórmula de aplicação restrita a estes pontos e que dá a posição de equilíbrio com respeito aos fotodiodos. O desvio padrão ou erro azimutal obtido por Halmos foi de 6,6", em condições de Laboratório, enquanto o obtido por Vanicek também em condições de Laboratório foi de 4,4".

Vanicek(1986), procura estabelecer a posição de equilíbrio giroscópico a partir de dados tomados em três pontos de determinaçãoa temporal, duas posições simétricas com respeito ao zero da escala auxiliar de leituras e no zero. Com oito oscilações, ou seja, quatro períodos, num total de 48 leituras, é possível obter-se este desvio padrão na determinação azimutal. O modelo matemático estabelecido para o ajustamento dos dados não leva em conta o amortecimento do movimento do eixo de rotação porque, segundo Vanicek, o erro introduzido na cronometragem manual é muito maior que o introduzido pelo amortecimento.

A virtude deste trabalho é não restringir o processo de



tomada de dados às posições por ele utilizadas, e sim podendo ser utilizado para ajustar dados em qualquer outro processo de tomada manual de tempos.

Jeudy(1982) utilizou o mesmo modelo matemático para ajustar dados que são utilizados na análise espectral, no domínio do tempo, realizada a partir de determinações temporais com o giroteodolito equipado com fotocélulas. Este procedimento foi descrito no item 3.8.3 . Importante novamente ressaltar que o método de Jeudy implica em automatização total do processo de coleta de dados através das fotocélulas colocadas na posição zero da escala de leituras auxiliar e em duas posições simétricas com respeito a este zero e com diversos pontos de leitura.

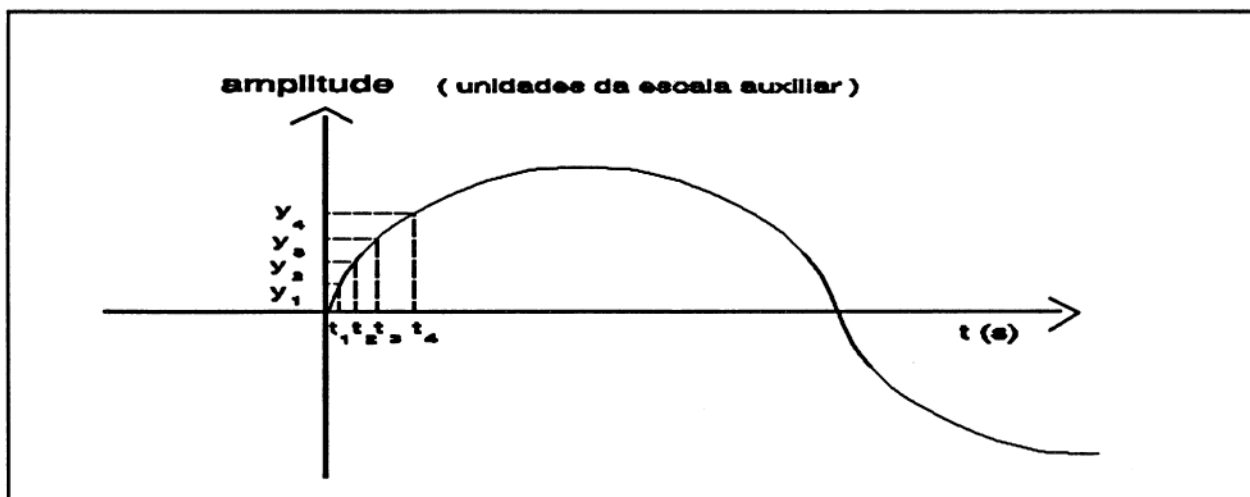
Neste trabalho, utiliza-se este mesmo modelo matemático, porém a análise espectral realizada é diferente no sentido em que, ao invés de utilizar-se uma função espectral normalizada, procede-se a uma análise espectral por Fourier, no domínio das frequências.

#### 4.5.2 Modelo matemático e ajustamento pelo método paramétrico

Observe-se a fig.40. Denominando-se  $\bar{y}_i$  as amplitudes em unidades da escala auxiliar correspondentes aos instantes  $t_i$ , então:

$$\bar{y}_i = \mu + \hat{a} \cos(\hat{\omega} t_i) + \hat{b} \sin(\hat{\omega} t_i) \quad (166)$$

FIGURA 40 - AMPLITUDE DO MOVIMENTO SENOIDAL EM FUNÇÃO DO TEMPO



Os valores de  $\bar{y}_i$  serão ajustados ( $L^a$ ) em função dos parâmetros ( $X^a$ ), que são:

- $\mu$  direção do Norte giroscópico em unidades da escala auxiliar;
- $a$  amplitude do movimento harmônico;
- $b$  amplitude do movimento harmônico;
- $w$  frequência angular.

Este último é considerado parâmetro porque permite avaliar-se flutuações no período principal de movimento. O movimento harmônico é suposto resultante de um termo senoidal e cossenoidal porque o eixo de rotação está deslocado da origem quando do início da marcação dos tempos. Por outro lado, devido aos problemas mecânicos que sempre afetam a construção do instrumento, não pode-se afirmar que o início do movimento senoidal coincida exatamente com a passagem da marca auxiliar sobre o eixo  $x$ , que

materializa a direção aproximada  $N'$ , ou seja, pelo zero na escala auxiliar de leituras. Assim o modelo matemático é do tipo:

$$L^a = F ( X^a ) \quad (167)$$

sendo que o vetor dos parâmetros é:

$$X^a = \begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{\omega} \end{bmatrix} \quad (168)$$

A condição de mínimos quadrados então será:

$$\sum_{i=1}^n ( \bar{y} - y_i )^2 = \min \quad (169)$$

ou seja, os resíduos são  $V = \bar{y}_i - y_i = L^a - L_b$ . Estes últimos correspondem às observações das amplitudes. Devido ao fato de todas as determinações serem feitas com a mesma metodologia, no mesmo local, nas mesmas condições e pelo mesmo operador, considera-se a matriz dos pesos  $P$  como igual à matriz identidade.

Para o valor de  $\mu$  representar diretamente o valor de  $\Delta N$ , faz-se  $y_i = 0$  exatamente sobre a direção do Norte aproximado  $N'$ . Para os valores iniciais dos parâmetros, que podem ser arbitrados, foram escolhidos os seguintes valores:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 10,000 \\ 1,200 \\ 0,015 \end{bmatrix} \quad (170)$$

O vetor das observações ajustadas será:

$$L^a = L_b + V \quad (171)$$

e o vetor dos parâmetros ajustados é:

$$X^a = X_0 + X \quad (172)$$

onde X é o vetor das correções. O modelo linearizado por Taylor, de acordo com (Mikhail,1976) será:

$$A X + L = V \quad (173)$$

onde o vetor  $L = F(X_0) - L_b = L_0 - L_b$ . A matriz A é formada pelas derivadas da função F (modelo matemático) em relação aos parâmetros no ponto  $X_0$ , ou seja, matematicamente:

$$A = \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)_{x_0} \quad (174)$$

Assim, obtém-se:

$$A_{ii} = 1 \quad \text{para} \quad i=1,n \quad (175)$$

onde  $n$  é o número de dados. De igual maneira,

$$A_{12} = \cos(\hat{\omega} t_i) \quad (176)$$

$$A_{13} = \sin(\hat{\omega} t_i) \quad (177)$$

$$A_{14} = -\hat{a} t_i \sin(\hat{\omega} t_i) + \hat{b} t_i \cos(\hat{\omega} t_i) \quad (178)$$

Deste modo, o vetor dos parâmetros é dado por (Mikhail, 1976):

$$X = -(A^T A)^{-1} A^T L \quad (179)$$

e a qualidade do ajustamento é testada pelo  $\hat{\sigma}_0$  a posteriori:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T V}{n - 4} \quad (180)$$

porque são quatro os parâmetros. Vanicek(1986) sugere que as iterações sejam feitas até que o valor  $z$  resulta em:

$$z = \left| \left( \frac{\sigma_0^2 \text{ j-ésima it.} - \sigma_0^2 \text{ j-ésima - 1 it.}}{\sigma_0^2 \text{ j-ésima - 1 it.}} \right) \right| \leq 0,0001 \quad (181)$$

A matriz variança-covariança dos parâmetros ajustados é dada por:

$$\Sigma_{x^*} = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1} \quad (182)$$

### 4.5.3 Análise dos resultados do ajustamento senoidal

#### 4.5.3.1 Saída do programa de ajustamento

O programa que executa este ajustamento senoidal denomina-se VAIM.FOR, e foi escrito na linguagem FORTRAN, porque a versão executável pode ser implantada no microcomputador portátil que acompanha o instrumento ao campo.

Este programa encontra-se listado no Apêndice 6. Os argumentos de entrada são: a) o número de dados temporais do arquivo gerado pelo programa CHORA.FOR, que é igual ao número de linhas da matriz A; b) o número de graus de liberdade ( $n^{\circ}$  de dados - 4); c) os nomes dos arquivos de entrada, saída e dos valores aproximados  $X_0$ . Após a sua execução, obtém-se os valores dos parâmetros ajustados ( $X^a$ ), a matriz variância - covariância dos parâmetros ajustados (que fornece a estimativa de precisão de cada parâmetro ajustado), o número de iterações e o valor de  $\sigma_0$  a posteriori. O valor de  $\sigma_0$  a priori foi adotado igual a 1.

É neste ponto que pode-se testar a eficiência do processo de tomada de dados temporais, do tipo de ajustamento, do modelo matemático adotado, e da sua adequação ao caso estudado.

#### 4.5.3.2 Análise estatística do $\sigma_0$ a posteriori

Existem dois fatos preponderantes a serem avaliados neste ponto. O primeiro é o número de iterações necessário para ser

obedecido o critério de convergência sugerido por Vanicek. O outro é a obediência do valor de  $\sigma_0^2$  ao teste  $\chi^2$  de verificação da qualidade do ajustamento.

O comportamento das séries temporais de dados foi inicialmente variado perante estes dois fatos. Para diversas séries, o número de iterações foi pequeno, no máximo 20 iterações, e obteve-se convergência, com valores de  $\sigma_0$  a posteriori pequenos, na ordem de  $10^{-2}$ . Por outro lado, em outro grupo de séries temporais, ocorreram dois tipos de comportamento: ou não convergiram tendo-se esperado 50 iterações para interromper o processo ou aconteceu a convergência e o valor  $\sigma_0$  a posteriori tendeu para valores em torno de 6 ou 7. Submetendo-se todas as séries uma análise estatística, aplica-se o teste do tipo  $\chi^2$  unicaudal descrito por Mikhail(1976) e que consiste em:

$$\chi_r^2 = \frac{V^T V}{\sigma_0^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2(a \text{ posteriori})}{\sigma_0^2(a \text{ priori})} \times r \quad (183)$$

onde  $r$  é o número de graus de liberdade ( $n^\circ$  de observações -  $n^\circ$  de parâmetros). A hipótese nula  $H_0$  é:

$$H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 \quad (184)$$

contra a hipótese alternativa  $H_a$ , que é:

$$H_a : \hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2 \quad (185)$$

Rejeita-se  $H_0$  quando:

$$\chi_r^2 > \chi_{\alpha,r}^2 \quad (186)$$

A rejeição de uma série pode ter vários significados. Ou o modelo matemático não está adequado ao fenômeno físico que tenta descrever, ou existem erros grosseiros que causam grandes resíduos  $V$ , ou ainda, o teste unicaudal não é o mais adequado ao caso. Quanto a este último aspecto verificou-se ser adequado devido à ordem de grandeza resultante para o valor do  $\sigma_0$  a posteriori.

#### 4.5.3.3 Considerações sobre o tamanho das séries

Para tentar-se compreender porque neste trabalho houve séries que convergiram para um valor de  $\sigma_0$  a posteriori decimal, enquanto outros convergiram para valores 100 vezes maiores, ou não convergiram, inicialmente foram estudados os resíduos do ajustamento nas séries que convergiram para altos valores. Observou-se então que os maiores resíduos ocorreram nas extremidades do movimento de oscilação senoidal, e nas séries mais longas, de cerca de uma hora.

Uma primeira tentativa de eliminação simples dos dados que geravam os mais altos resíduos mostrou que, embora este procedimento em determinados caso tenha permitido alcançar-se um valor bem menor de  $\sigma_0$  a posteriori, em outros casos, isto não aconteceu. Existem vários métodos de determinação de erros grosseiros e que estudam como proceder neste tipo de eliminação. Entretanto, este caminho não foi seguido aqui porque notou-se a



constância dos resíduos mais altos nas extremidades nos diversos arquivos de dados, e a eliminação de um número tão expressivo de pontos amostrais poderia distorcer todo o trabalho.

Diante deste fato, passou-se a outro procedimento: a eliminação gradual de períodos completos do movimento de oscilação senoidal, diminuindo-se o tamanho das séries. A seguir submeteu-se estes dados restantes ao processo de ajustamento, afim de avaliar o seu comportamento. O que ocorreu foi um aproveitamento de muitas séries que não haviam convergido, cujos valores do  $\sigma_0$  a posteriori passaram a convergir para valores da ordem de  $10^{-2}$ , ou ainda nas séries cujo valor inicial do  $\sigma_0$  a posteriori era da ordem de 6 ou 7 unidades, passando diretamente a convergir em torno de valores da ordem de  $10^{-2}$ . Desta maneira, apareceram as séries diminuídas que foram denotadas por Di a partir da tabela 5.

Posteriormente, no Cap.V são apresentadas conclusões a respeito da validade deste procedimento à luz das possíveis causas de rejeição citadas no final do item 4.5.3.2.

#### **4.5.4 Resultados obtidos no ajustamento senoidal**

##### **4.5.4.1 Estudo das séries pelo teste $\chi^2$**

Após realizar o ajustamento de todas as séries de dados, e proceder à diminuição de períodos quando necessário, desenvolveu-se uma série de análises sintetizadas nas Tabelas 7, 8, 9, 10, 11 e 12

que mostram muitas implicações deste estudo no domínio do tempo. Em primeiro lugar vai-se mostrar a tabela de estudo da aceitação de séries segundo os critérios expressos nas eq.(183), (184), (185) e (186). Para melhor compreensão deste procedimento, realiza-se um exemplo de cálculo completo com a série Sec1. Esta possui 201 pontos amostrais, e então o número de graus de liberdade será  $r = 201 - 4 = 197$ . O valor do  $\sigma_0$  a posteriori após 6 iterações é 0,02872075, enquanto o valor a priori foi estabelecido como igual a 1. Assim, da eq.(183):

$$\chi_r^2 = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \times (r) = \frac{0,02872075^2}{1^2} \times (197) = 0,0162501651$$

$$H_0 : \hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$$

$$H_a : \hat{\sigma}_0^2 > \sigma_0^2$$

Então rejeita-se  $H_0$  se  $\chi_r^2$  (calc.)  $>$   $\chi_{\alpha,r}^2$  (tabelado); para  $\alpha = 0,05$ , ou seja, para um nível de confiança de 95%, então, neste exemplo,

$$\chi_{0,05,197}^2 = 165,5265 \quad \text{e} \quad \chi_r^2 = 0,0162501651$$

não rejeita-se  $H_0$  e a série é aceita.

A Tabela 7 apresenta os valores referentes aos testes para todas as séries. Observe-se que a série sec13 apresenta comportamento atípico, enquanto as séries sec20 e sec33 apresentam problemas de cronometragem já detectados anteriormente.

TABELA 07 - VALORES REFERENTES AO TESTE DE  $\chi^2$ 

série	$\sigma_0$	graus de liberdade	$\chi^2_r(\text{calc.})$	$\chi^2_{\alpha,r}(\text{tab.})$	conclusão
sec2	6,391	261	10663,543	224,59	rejeitada
sec2Di1	0,052	217	0,580	183,91	aceita
sec3	0,029	117	0,096	93,02	aceita
sec4	0,019	77	0,028	57,78	aceita
sec5	6,504	405	17134,347	359,35	rejeitada
sec5Di1	6,543	361	15454,499	317,96	rejeitada
sec5Di2	6,645	273	12056,183	235,73	rejeitada
sec5Di4	0,031	227	0,221	193,13	aceita
sec5Di5	0,030	181	0,163	150,88	rejeitada
sec8	0,026	263	0,181	226,44	aceita
sec9	755,762	249	142222836,300	213,46	rejeitada
sec9Di1	5,183	213	5721,023	180,22	rejeitada
sec9di2	0,024	177	0,102	180,22	aceita
sec10			não converge		
sec10di1	0,028	191	0,154	160,28	aceita
sec11	0,023	263	0,147	266,44	aceita
sec12			não converge		
sec12Di1	5,478	347	10413,343	300,15	rejeitada
sec12Di2			não converge		
sec12Di3	0,025	368	0,169	231,08	aceita
sec13	0,144	279	5,808	241,31	aceita*
sec14	6,229	305	11836,984	265,54	rejeitada
sec14Di1	6,381	261	10628,230	224,54	rejeitada
sec14Di2	6,354	221	8922,730	183,90	rejeitada
sec14di3	0,027	175	0,126	145,40	aceita
sec15	0,024	235	0,144	202,36	aceita
sec15Di1	0,024	197	0,121	165,32	aceita
sec16	0,023	197	0,101	165,32	aceita
sec17	5,453	301	8949,523	261,81	rejeitada
sec17Di1	0,025	263	0,170	226,45	aceita
sec18	5,457	301	8965,395	261,81	rejeitada
sec18Di1	5,422	263	7732,144	226,44	rejeitada
sec18Di2	5,538	225	6901,357	191,28	rejeitada
sec18Di3	4,661	191	4149,599	156,36	rejeitada
sec18Di4	0,022	149	0,074	121,78	aceita
sec19	5,452	339	10078,298	297,33	rejeitada
sec19Di1			não converge		
sec19Di2	5,523	263	8021,649	226,44	rejeitada
sec19Di3	5,529	225	6803,389	191,28	rejeitada
sec19Di4	5,507	191	5782,466	156,36	rejeitada
sec19di5	0,035	149	0,192	121,79	aceita

Esta tabela continua na página seguinte.

TABELA 07 - CONTINUAÇÃO

série	$\hat{\sigma}_0$	graus de liberd.	$\chi^2_r(\text{calc.})$	$\chi^2_{\alpha,r}(\text{tab.})$	conclusão
sec20	5,441	299	8848,984	259,94	rejeitada
sec20Di1			não converge		
sec20Di2	0,495	223	54,712	189,45	aceita*
sec21	6,618	274	12002,310	235,73	rejeitada
sec21Di2	0,021	181	0,083	150,88	aceita
sec22			não converge		
sec22Di1	6,543	267	11430,469	230,16	rejeitada
sec22Di2	6,586	225	9760,780	191,28	rejeitada
sec22Di3	0,022	179	0,094	149,05	aceita
sec23	5,767	237	7887,499	202,36	rejeitada
sec23Di1	5,761	197	6538,256	165,52	rejeitada
sec23Di2	0,027	157	0,121	129,03	aceita
sec24	4,591	157	3309,408	124,03	rejeitada
sec24Di1	0,018	125	0,041	100,18	aceita
sec25	5,034	205	5194,937	171,95	rejeitada
sec25Di1	0,026	171	0,120	141,75	aceita
sec26			não converge		
sec26Di	0,021	237	0,106	202,36	aceita
sec27	6,860	285	13413,557	246,90	rejeitada
sec27Di1	0,021	237	0,110	202,36	aceita
sec28	0,032	237	0,237	202,36	aceita
sec29	4,593	125	2636,956	100,18	rejeitada
sec29Di1	0,018	89	0,028	68,25	aceita
sec30	5,407	225	6578,021	191,28	rejeitada
sec30Di1	5,483	187	5622,345	156,36	rejeitada
sec30Di2	0,020	147	0,062	119,98	aceita
sec31	4,706	225	4982,948	191,28	rejeitada
sec31Di1	4,745	131	2949,468	81,90	rejeitada
sec31Di2	0,028	95	0,076	73,51	aceita
sec32			não converge		
sec32Di1	0,021	197	0,087	165,52	aceita
sec33	0,458	237	49,655	202,36	aceita
sec34			não converge		
sec34Di1	0,019	157	0,061	129,03	aceita
sec35			não converge		
sec35Di1	5,345	181	5170,993	150,88	rejeitada
sec35Di2	0,027	145	0,105	118,17	aceita
sec36			não converge		
sec36Di1	0,017	149	0,046	121,78	aceita

#### 4.5.4.2 Valores ajustados de $\Delta N$ , $a$ , $b$ , $w$ .

Na tabela 08 apresenta-se os valores ajustados pelo método paramétrico de  $\Delta N$ ,  $a$ ,  $b$  e  $w$ . A separação  $\Delta N$  entre a direção do Norte giroscópico ( $N$ ) e do Norte aproximado ( $N'$ ), as amplitudes do movimento harmônico  $a$  e  $b$ , expressas inicialmente em unidades de escala auxiliar, e posteriormente transformadas utilizando-se o fator  $m$ , para minutos e segundos de arco, através da relação expressa em 4.4.3.1 . A frequência angular  $w$  está expressa em radianos por segundo. Esta é igual a  $2\pi/T$  onde  $T$  é o período do movimento senoidal descrito pelo eixo de rotação do giroscópio.

TABELA 08 - APRESENTA OS RESULTADOS DOS PARÂMETROS AJUSTADOS

série	$\Delta N(u.E)$	$\Delta N$	$a(u.E)$	$b(u.E)$	$w(rad/s)$	T	
						min	s
sec1	0,619	6'11,23"	9,323	-2,317	0,0167914	6	14,19
sec2Di1	0,626	6'15,51"	10,383	-2,901	0,0168016	6	13,96
sec3	0,621	6'12,70"	9,362	-2,538	0,0167956	6	14,99
sec4	0,363	3'37,72"	9,616	-2,142	0,0167977	6	14,05
sec5Di5	-0,560	-5'36,12"	10,536	-4,433	0,0167953	6	14,04
sec8	1,697	16'58,39"	9,263	-2,288	0,0168054	6	13,88
sec9Di2	1,605	16'03,03"	8,355	-2,728	0,0168008	6	13,98
sec10Di2	1,619	16'11,99"	9,733	-1,887	0,0168001	6	13,98
sec11	1,830	18'18,23"	9,142	-2,536	0,0167959	6	14,09
sec12Di3	1,060	10'38,66"	7,911	-5,943	0,0167954	6	14,02
sec13	1,749	17'29,60"	10,251	-2,798	0,0168007	6	13,98
sec14Di3	1,507	15'04,21"	10,439	-3,851	0,0167958	6	14,14
sec15Di1	1,495	14'57,10"	9,482	-2,151	0,0167979	6	14,05
sec16	1,269	12'41,42"	8,847	-2,802	0,0168014	6	13,97
sec17Di1	0,115	1'09,26"	8,842	-2,272	0,0168025	6	13,94
sec18Di4	0,119	1'11,39"	8,852	-3,768	0,0167980	6	14,04
sec19Di5	0,119	1'11,81"	8,839	-4,121	0,0167933	6	14,15
sec20Di2	1,637	16'22,04"	7,756	-5,088	0,0168079	6	13,80
sec21Di2	0,360	3'36,00"	10,617	-4,159	0,0167915	6	14,18
sec22Di3	0,242	2'25,24"	10,722	-3,378	0,0167988	6	14,04

## CONTINUAÇÃO DA TABELA 08

série	$\Delta$ (u.E.)	$\Delta$ N	a(u.E.)	b(u.E.)	w(rad/s)	T min s
sec22Di3	0,242	2'25,24"	10,722	-3,377	0,0167982	6 14,04
sec24Di1	0,292	2'55,34"	4,698	-6,312	0,0167938	6 14,14
sec25Di1	0,327	3'16,34"	7,629	-4,019	0,0168045	6 13,90
sec26Di1	0,332	3'19,32"	7,665	-8,497	0,0167970	6 14,06
sec27Di1	0,329	3'17,78"	8,654	-7,948	0,0167732	6 14,59
sec28	0,264	2'38,87"	7,723	-6,289	0,0168703	6 12,44
sec29Di1	0,265	2'39,43"	4,728	-6,613	0,0168881	6 12,05
sec30Di2	0,283	2'49,91"	8,721	-3,405	0,0167971	6 14,06
sec31Di2	0,300	3'00,31"	5,714	-5,966	0,0167976	6 14,05
sec32Di1	0,331	3'18,84"	8,656	-4,368	0,0168132	6 13,70
sec33	0,610	6'05,94"	7,672	-3,631	0,0167882	6 14,02
sec34Di1	0,284	2'50,61"	7,716	-2,449	0,0167921	6 14,17
sec35Di2	0,307	3'03,96"	8,669	-3,226	0,0168007	6 13,98
sec36Di1	0,254	2'32,62"	8,755	-3,322	0,1679619	6 14,08

O ajustamento dos dados fornece também a estimativa de precisão de cada parâmetro, através da matriz variança-covariança dos parâmetros ajustados. Como exemplo, mostra-se abaixo esta matriz, para a série sec1.

$$\begin{bmatrix} 0,4216 \times 10^{-5} & -0,220 \times 10^{-6} & -0,1469 \times 10^{-5} & -0,1667 \times 10^{-9} \\ -0,2204 \times 10^{-6} & 0,118 \times 10^{-4} & 0,2722 \times 10^{-5} & 0,4476 \times 10^{-9} \\ -0,1469 \times 10^{-5} & 0,272 \times 10^{-5} & 0,2536 \times 10^{-4} & 0,2149 \times 10^{-8} \\ -0,1667 \times 10^{-9} & 0,447 \times 10^{-9} & 0,2149 \times 10^{-8} & 0,2480 \times 10^{-12} \end{bmatrix}$$

As varianças dos parâmetros correspondentes situam-se na diagonal principal. Assim, o elemento  $a_{11}$  da matriz corresponde à variança do  $\Delta N$  (que corresponde a  $\mu$ ), o elemento  $a_{22}$  corresponde à variança do parâmetro  $a$ , o elemento  $a_{33}$  corresponde à variança do parâmetro  $b$  e finalmente, o elemento  $a_{44}$  corresponde à variança do parâmetro  $w$ . Os outros elementos da matriz representam as

covarianças entre os parâmetros, de acordo com a linha e a coluna correspondentes. A Tabela 09 apresenta os resultados obtidos para as séries realizadas neste trabalho. Ressalta-se que estes resultados mostram a precisão interna ("precision") ou capacidade de repetibilidade das medidas temporais.

TABELA 09 - PRECISÃO INTERNA DOS PARÂMETROS AJUSTADOS

série	$\sigma_{\Delta u}(u.E), "$	$\sigma_a(u.E), "$	$\sigma_b(u.E), "$	$\sigma_w(\text{rad/s})$
sec1	$2,05 \times 10^{-3}$ 1,232"	$3,44 \times 10^{-3}$ 2,062"	$1,59 \times 10^{-2}$ 9,550"	$4,9802 \times 10^{-7}$
sec2Di1	$3,57 \times 10^{-3}$ 2,140"	$6,04 \times 10^{-3}$ 3,620"	$8,53 \times 10^{-3}$ 5,120"	$7,5371 \times 10^{-7}$
sec3	$2,15 \times 10^{-3}$ 1,287"	$3,44 \times 10^{-3}$ 2,060"	$5,04 \times 10^{-3}$ 3,022"	$8,6314 \times 10^{-7}$
sec4	$2,35 \times 10^{-3}$ 1,410"	$3,63 \times 10^{-3}$ 2,181"	$5,68 \times 10^{-3}$ 3,406"	$1,4886 \times 10^{-6}$
sec5Di5	$2,56 \times 10^{-3}$ 1,355"	$3,97 \times 10^{-3}$ 2,381"	$5,29 \times 10^{-3}$ 3,175"	$5,6575 \times 10^{-7}$
sec8	$1,62 \times 10^{-3}$ 0,972"	$2,84 \times 10^{-3}$ 1,707"	$3,88 \times 10^{-3}$ 2,330"	$2,7528 \times 10^{-7}$
sec9Di2	$1,65 \times 10^{-3}$ 0,989"	$2,85 \times 10^{-3}$ 1,713"	$3,96 \times 10^{-3}$ 2,375"	$4,3116 \times 10^{-7}$
sec10Di2	$2,06 \times 10^{-3}$ 1,238"	$2,06 \times 10^{-3}$ 1,238"	$5,03 \times 10^{-3}$ 3,016"	$4,3116 \times 10^{-7}$
sec11	$1,46 \times 10^{-3}$ 0,876"	$2,57 \times 10^{-3}$ 1,542"	$3,51 \times 10^{-3}$ 2,101"	$2,5039 \times 10^{-7}$
sec12Di4	$1,66 \times 10^{-3}$ 0,995"	$3,28 \times 10^{-3}$ 1,968"	$3,62 \times 10^{-3}$ 2,174"	$3,1381 \times 10^{-7}$
sec13	$8,65 \times 10^{-3}$ 5,188"	$1,55 \times 10^{-2}$ 9,351"	$2,04 \times 10^{-2}$ 12,229"	$1,3070 \times 10^{-6}$
sec14Di3	$2,05 \times 10^{-3}$ 1,228"	$2,71 \times 10^{-3}$ 1,625"	$3,70 \times 10^{-3}$ 2,222"	$5,2015 \times 10^{-7}$
sec15Di1	$1,77 \times 10^{-3}$ 1,061"	$2,98 \times 10^{-3}$ 1,788"	$4,32 \times 10^{-3}$ 2,594"	$4,2150 \times 10^{-7}$
sec16	$1,60 \times 10^{-3}$ 3,560"	$2,84 \times 10^{-3}$ 1,705"	$3,82 \times 10^{-3}$ 2,297"	$3,7205 \times 10^{-7}$
sec17Di1	$1,56 \times 10^{-3}$ 0,940"	$2,73 \times 10^{-3}$ 1,637"	$3,78 \times 10^{-3}$ 2,267"	$2,7822 \times 10^{-7}$
sec18Di4	$1,85 \times 10^{-3}$ 1,109"	$3,30 \times 10^{-3}$ 1,983"	$4,30 \times 10^{-3}$ 2,579"	$5,4570 \times 10^{-7}$
sec19Di5	$2,97 \times 10^{-3}$ 1,780"	$5,39 \times 10^{-3}$ 3,237"	$6,82 \times 10^{-3}$ 4,091"	$8,5821 \times 10^{-7}$

TABELA 09 - CONTINUAÇÃO

série	$\sigma_{\Delta N}(\text{u.E.}), "$	$\sigma_a(\text{u.E.}), "$	$\sigma_b(\text{u.E.}), "$	$\sigma_w(\text{rad/s})$
sec20Di2	$3,33 \times 10^{-2}$ 19,91"	$6,25 \times 10^{-2}$ 37,595"	$7,45 \times 10^{-2}$ 44,748"	$2,1612 \times 10^{-4}$
sec21Di2	$1,62 \times 10^{-3}$ 0,976"	$2,81 \times 10^{-3}$ 1,686"	$3,80 \times 10^{-3}$ 2,281"	$4,0527 \times 10^{-7}$
sec22Di3	$1,73 \times 10^{-3}$ 1,040"	$2,93 \times 10^{-3}$ 1,783"	$4,15 \times 10^{-3}$ 2,489"	$4,4399 \times 10^{-7}$
sec23Di2	$1,99 \times 10^{-3}$ 1,198"	$4,73 \times 10^{-3}$ 2,836"	$3,38 \times 10^{-2}$ 2,089"	$5,6583 \times 10^{-7}$
sec24Di1	$1,61 \times 10^{-3}$ 0,967"	$3,47 \times 10^{-3}$ 2,083"	$3,12 \times 10^{-3}$ 1,871"	$5,7989 \times 10^{-7}$
sec25Di1	$2,03 \times 10^{-3}$ 1,220"	$3,73 \times 10^{-3}$ 2,236"	$4,67 \times 10^{-3}$ 2,806"	$5,4020 \times 10^{-7}$
sec26Di1	$1,40 \times 10^{-3}$ 0,841"	$2,94 \times 10^{-3}$ 1,762"	$2,86 \times 10^{-3}$ 1,718"	$2,7810 \times 10^{-7}$
sec27Di1	$1,40 \times 10^{-3}$ 0,839"	$2,84 \times 10^{-3}$ 1,704"	$2,95 \times 10^{-3}$ 1,772"	$2,7829 \times 10^{-7}$
sec28	$2,05 \times 10^{-3}$ 1,233"	$4,10 \times 10^{-3}$ 2,463"	$4,43 \times 10^{-3}$ 2,661"	$3,9234 \times 10^{-7}$
sec29Di1	$1,94 \times 10^{-3}$ 1,162"	$4,01 \times 10^{-3}$ 2,409"	$3,78 \times 10^{-3}$ 2,271"	$9,1080 \times 10^{-7}$
sec30Di2	$1,69 \times 10^{-3}$ 1,017"	$2,94 \times 10^{-3}$ 1,768"	$4,01 \times 10^{-3}$ 2,407"	$5,2114 \times 10^{-7}$
sec31Di2	$2,86 \times 10^{-3}$ 1,715"	$5,80 \times 10^{-3}$ 3,483"	$5,79 \times 10^{-3}$ 3,476"	$1,3004 \times 10^{-6}$
sec32Di1	$1,49 \times 10^{-3}$ 0,894"	$2,70 \times 10^{-3}$ 1,621"	$3,45 \times 10^{-3}$ 2,072"	$3,5572 \times 10^{-7}$
sec33	$0,88 \times 10^{-3}$ 17,816"	$5,43 \times 10^{-2}$ 32,633"	$6,91 \times 10^{-2}$ 41,460"	$5,6892 \times 10^{-6}$
sec34Di1	$1,58 \times 10^{-3}$ 0,946"	$2,79 \times 10^{-3}$ 1,675"	$3,73 \times 10^{-3}$ 2,236"	$4,4095 \times 10^{-7}$
sec35Di2	$2,77 \times 10^{-3}$ 1,366"	$3,95 \times 10^{-3}$ 2,371"	$5,33 \times 10^{-3}$ 3,200"	$6,9918 \times 10^{-7}$
sec36Di1	$1,45 \times 10^{-3}$ 0,870"	$2,51 \times 10^{-3}$ 1,511"	$3,44 \times 10^{-3}$ 2,064"	$4,4590 \times 10^{-7}$

Observe-se que nesta tabela a tres primeiras colunas apresentam o valor do parâmetro em unidades da escala auxiliar em cima e dos segundos de arco correspondentes em baixo. Percebe-se também que as



séries sec13, sec20 e sec33 apresentam problemas de leitura de dados, e embora aceitas no ajustamento, revelam um padrão atípico em relação às outras séries e por este motivo não serão consideradas nos procedimentos posteriores.

#### 4.5.4.3 Número de iterações

Algumas considerações podem ser feitas a respeito do número de iterações das séries. A tabela 10 apresenta estes resultados.

TABELA 10 - NÚMERO DE ITERAÇÕES NAS DIVERSAS SÉRIES

série	nº de iterações	série	nº de iterações
sec1	6	sec19Di5	5
sec2Di1	14	sec21Di2	4
sec3	8	sec22Di3	6
sec4	5	sec23Di2	7
sec5Di5	5	sec24Di1	8
sec8	7	sec25Di1	9
sec9Di2	10	sec26Di1	7
sec10Di2	6	sec27Di1	19
sec11	8	sec28	9
sec12Di2	6	sec29Di1	6
sec14Di4	6	sec30Di2	4
sec15Di1	6	sec31Di2	5
sec16	6	sec32Di1	8
sec17Di1	14	sec34Di1	6
sec18Di4	4	sec35Di2	4
		sec36Di1	5

Conforme mostrado, o número de iterações, uma vez a série aceita, é baixo, e neste conjunto de séries apresentou a média de 7 iterações. Outro aspecto observado é que em séries longas, como por exemplo as séries sec5 e sec12, ao diminuir-se seu comprimento,

através da diminuição de períodos completos, não ocorre necessariamente a diminuição no número de iterações. Isto se explica porque podem existir dados com erro grosseiros de medida situados no meio do conjunto de dados, e que à medida que diminui-se o número total de dados a serem ajustados, acabam gerando resíduos maiores os quais interferem no valor final do número de iterações e do  $\sigma_0$ . A tabela 11 apresenta estes resultados.

TABELA 11 - SÉRIES LONGAS E O NUMERO DE ITERAÇÕES

série	nº de dados	nº de oscil.	tempo		nº de iterações
			min	s	
sec5	409	9	56	4,83	não converge
sec5Di1	365	8	49	51,46	13
sec5Di2	321	7	43	37,00	25
sec5Di3	278	6	37	22,93	9
sec5Di4	232	5	31	9,77	10
sec5Di5	185	4	24	55,29	5
sec12	381	10	62	19,88	não converge
sec12Di1	347	9	56	6,00	18
sec12Di2	310	8	49	52,00	não converge
sec12Di3	272	7	43	37,00	9
sec12Di4	233	6	37	33,00	9
sec12Di5	195	5	31	9,99	11

#### 4.5.4.4 Tempo de tomada de medidas

Para tornar o Método com Automação Parcial mais útil em termos de operação no campo, é necessário estudar-se o tempo ideal de aquisição de dados. A Tabela 12 apresenta um resumo do comportamento das séries em relação ao tempo de aquisição de dados.

TABELA 12 - MOSTRA O TEMPO DE AQUISIÇÃO DE DADOS DAS SÉRIES

série	nºde oscil.	tempo de aquis.		observação
		min	s	
sec1	5	29	19,20	aceita
sec2	6	35	29,78	rejeitada
sec2Di1	5	29	16,24	aceita
sec3	3	16	49,49	aceita
sec4	2	10	59,49	aceita
sec5	9	56	4,80	rejeitada
sec5Di1	8	49	51,46	rejeitada
sec5Di2	7	43	37,20	rejeitada
sec5Di3	6	37	22,93	rejeitada
sec5Di4	5	31	9,76	aceita
sec5Di5	4	24	55,29	aceita
sec8	7	41	38,83	aceita
sec9	7	41	34,00	rejeitada
sec9Di1	6	35	20,00	rejeitada
sec9Di2	5	29	6,00	aceita
sec10	7	43	35,39	rejeitada
Sec10Di1	6	37	22,80	rejeitada
sec10Di2	5	31	8,50	aceita
sec11	7	41	37,00	aceita
sec12	10	62	19,98	rejeitada
sec12Di1	9	56	6,00	rejeitada
sec12Di2	8	49	52,01	rejeitada
sel2Di3	7	43	37,70	rejeitada
sec12Di4	6	37	33,30	rejeitada
sec12Di5	5	31	10,16	aceita
sec14	7	41	35,90	rejeitada
sec14Di1	6	35	22,14	rejeitada
sec14Di2	5	29	18,00	rejeitada
sec14Di3	4	22	53,00	aceita
sec15	6	35	28,42	aceita
sec15Di1	5	29	13,00	aceita
sec16	5	29	13,00	aceita
sec17	8	47	58,00	rejeitada
sec17Di1	7	41	44,00	aceita
sec18	8	47	53,00	rejeitada
sec18Di1	7	41	39,00	rejeitada
sec18Di2	6	35	25,00	rejeitada
sec18Di3	5	29	12,00	rejeitada
sec18Di4	4	22	57,00	aceita
sec19	9	54	6,00	rejeitada
sec19Di1	8	47	52,00	rejeitada
sec19Di2	7	41	38,00	rejeitada
sec19Di3	6	35	24,00	rejeitada

TABELA 12 - CONTINUAÇÃO

série	nº de oscil.	tempo		observação
		min	s	
sec19Di4	5	29	9,95	aceita
sec19Di5	4	22	56,00	aceita
sec21	6	35	27,00	rejeitada
sec21Di1	5	29	13,00	rejeitada
sec21Di2	4	22	59,00	aceita
sec22	7	41	55,00	rejeitada
sec22Di1	6	35	31,00	rejeitada
sec22Di2	5	29	17,00	rejeitada
sec22Di3	4	23	3,00	aceita
sec23	6	34	32,00	rejeitada
sec23Di1	5	28	18,00	rejeitada
sec23Di2	4	22	3,9	aceita
sec24	5	28	39,39	rejeitada
sec24Di1	4	22	25,00	aceita
sec25	6	35	19,00	rejeitada
sec25Di1	5	29	3,90	aceita
sec26	6	34	59,00	rejeitada
sec26Di1	5	28	45,00	aceita
sec27	6	35	6,90	rejeitada
sec27Di1	5	28	53,00	aceita
sec28	6	34	59,00	aceita
sec29	4	22	17,00	rejeitada
sec29Di1	3	16	8,00	aceita
sec30	6	35	26,00	rejeitada
sec30Di1	5	29	12,00	rejeitada
sec30Di2	4	22	58,00	aceita
sec31	5	29	06,00	rejeitada
sec31Di1	4	22	32,00	rejeitada
sec31Di2	3	16	18,00	aceita
sec32	6	35	18,00	rejeitada
sec32Di1	5	29	4,90	aceita
sec34	6	35	30,00	rejeitada
sec34Di1	5	29	17,00	aceita
sec35	5	35	26,99	rejeitada
sec35Di1	4	29	13,00	rejeitada
sec35Di2	3	22	58,00	aceita
sec36	5	29	13,00	rejeitada
sec36Di1	4	22	59,00	aceita

Deve-se mencionar que foi testado o comportamento de séries encurtadas, mesmo após terem sido aceitas, como por exemplo as séries sec15 e a sec5Di4. Concluiu-se que as séries diminuídas,

sec15Di1 e sec5Di5 convergiram para os mesmos valores que as primeiras ou seja, a diminuição de períodos não altera os valores finais dos parâmetros  $\Delta N$ ,  $a$ ,  $b$  e  $w$ . É claro que a diminuição da densidade de observações aumenta a influência dos erro introduzido pelo operador. Mas, pelo quadro de valores obtido, é possível afirmar que se tempo de aquisição for entre 20 minutos e 30 minutos, ou seja, cerca de 4 ou 5 períodos de oscilação, o método permite o aproveitamento de pelo menos 76,47 % das séries realizadas.

#### 4.5.4.5 Cálculo dos zeros da função ajustada.

Para a verificação da qualidade do ajustamento além do teste estatístico de  $\chi^2$  realizado no item 4.5.3.2, realizou-se o cálculo dos zeros da função senoidal ajustada, para verificação de simetria. Mais claramente, se o modelo matemático está adequado ao problema e a direção do Norte giroscópico estiver corretamente ajustada aos dados, os intervalos de tempo  $\Delta t_i$  (item 3.6.1) devem ser iguais a zero e a oscilação completamente simétrica. Este comportamento é diferente do apresentado pelo eixo de rotação do instrumento quando colocado na direção do Norte aproximado pois, em relação a este, o caráter da oscilação é assimétrico. Esta assimetria inclusive é o fundamento do Método das Passagens, porque associa-se à diferença de tempo que o eixo permanece a mais para um dos lados deste Norte aproximado à separação entre o Norte giroscópico e o Norte aproximado ( $\Delta N$ ). Se os dados obtidos nas

diferentes séries estiverem bem ajustados, esta assimetria desaparece. Assim:

$$\hat{a} \cos w t + \hat{b} \sin w t + \hat{\mu} = 0 \quad (185)$$

ou seja, para a série secl em unidades da escala auxiliar:

$$9,3235165 \cos (wt) - 2,3178309 \sin (wt) + 0,61870932 = 0 \quad (190)$$

onde, utilizando-se a igualdade  $\sin^2 (wt) + \cos^2 (wt) = 1$ , pode-se obter:

$$\cos (wt)_1 = 0,203344797 \quad \therefore wt_1 = 1,36602344 \text{ rad} \rightarrow t_1 = 81,35238 \text{ s}$$

e,

$$\cos (wt)_2 = -0,265842389 \quad \therefore wt_2 = 1,83987398 \text{ rad} \rightarrow t_2 = 44,21628 \text{ s}$$

pois o valor de  $w$  para esta série é de  $0,0016791436 \text{ rad/s}$ . Observando-se o Anexo II, pode-se comparar os valores resultantes do instante cronométrico da passagem pelo zero com os resultados acima, o que permite escolher-se a primeira resposta. Portanto, as outras passagens serão defasadas sempre de  $\pi$  radianos da primeira. Ou seja:

$$(wt - \pi)_1 = 0,203344797 \quad \rightarrow \quad (t)'_1 = 268,4473236 \text{ s}$$

$$(wt - 2\pi)_1 = 0,203344797 \quad \rightarrow \quad (t)''_1 = 455,5422602 \text{ s}$$

logo:  $\Delta t_{ui\ 1} = 268,44732376 - 81,3523849 = 187,094938\text{ s } (-)$  e

$\Delta t_{ui\ 2} = 455,5422602 - 268,4473236 = 187,094937\text{ s } (+)$

$\Delta t = \Delta t_{ui\ 1} + \Delta t_{ui\ 2} = (-) 2,115 \times 10^{-6}\text{ s}$

A mesma verificação foi realizada para as séries sec3, sec8, sec10Di2, sec34Di1, sec25Di1, sendo que em todas resultou um  $\Delta t$  da ordem de  $10^{-6}\text{ s}$ . Isto significa que, de acordo com a ordem de precisão oferecida pelo relógio do microcomputador, da ordem de  $10^{-2}\text{ s}$ , pode-se considerar que a função senoidal está suficientemente ajustada.

#### 4.5.4.6 Cálculo do valor médio do período principal de oscilação

A partir dos valores da frequência angular  $w$  ajustados para as diversas séries, mostrados na Tabela 09, bem como dos valores dos períodos correspondentes, pode-se calcular o valor médio destes períodos. O valor encontrado foi:

$$T_{\text{médio}} = 6 \text{ min } 13,9475 \text{ s} \quad \text{com} \quad \sigma_{n-1} = \pm 0,497 \text{ s}$$

#### 4.5.4.7 Propagação de erros

Um aspecto muito importante é como os erros cometidos nas determinações de grandezas físicas se propagam nos cálculos realizados com estas grandezas para a determinação de outras. Neste trabalho, uma vez que considera-se quatro parâmetros no ajustamento

dos dados, deve-se avaliar a propagação para os resultados finais de azimuth, dos erros cometidos em cada um destes parâmetros, separadamente.

Inicialmente, o valor de  $\Delta N$ , que está diretamente relacionado com  $\mu$  é considerado. Pela lei de propagação de covarianças, se o modelo é linear, do tipo:

$$Y = G X + C \quad (187)$$

então :

$$\Sigma_Y = G \Sigma_X G^T \quad (188)$$

sendo:  $\Sigma_X$  a matriz variança-covariança da variável X;

$\Sigma_Y$  a matriz variança-covariança da variável Y;

De acordo com a fig.35 e a eq.(153) tem-se que:

$$\beta = 360^\circ - N \quad (189)$$

$$\begin{aligned} A_z &= \beta + L_m \\ &= 360^\circ - N + L_m \end{aligned} \quad (190)$$

onde  $360^\circ$  é constante, e a leitura da mira é considerada sem erro.

Assim:

$$A_z = (360^\circ + L_m) - N = C + G X \quad (191)$$



onde : C é a constante  $(360^\circ - N)$ ,  $G = -1$ , e  $X = N$ .

Aplicando-se a eq.(191) vêm:

$$\Sigma_y = (-1) (\Sigma_x) (-1) \quad (192)$$

ou seja:

$$\Sigma_y = \Sigma_x \rightarrow \sigma_A^2 = \sigma_{\Delta N}^2 \quad (193)$$

isto equivale dizer que todos os erros cometidos na determinação de  $\Delta N$  propagam-se integralmente para o Azimute.

Em segundo lugar vai-se analisar a propagação de erros cometidos na aquisição de dados, e que se ligam aos parâmetros  $a$  e  $b$ . Goldemberg(1968) apresenta o problema de propagação de modelos não lineares de forma simples. Supondo-se que  $V$  seja uma função não linear de  $x$  e  $y$ , ( $V = V(x,y)$ ). Neste caso, quer-se saber a influência sobre o  $\Delta N$  devida a erros em  $a$  e  $b$ . Portanto:

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 (\sigma_x)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 (\sigma_y)^2} \quad (194)$$

onde não se considera a correlação entre os parâmetros. Como :

$$\Delta N = a \cos wt + b \sin wt \quad (195)$$

$$\sigma_{\Delta N} = \left(\frac{\partial \Delta N}{\partial a}\right) \cdot \sigma_a = \cos wt \cdot \sigma_a \quad (196)$$

e de igual modo:

$$\sigma_{\Delta N} = \left( \frac{\partial \Delta N}{\partial b} \right) \cdot \sigma_b = - \operatorname{sen} wt \cdot \sigma_b \quad (197)$$

Pode-se supor valores para se ter um idéia desta propagação. Valores típicos de  $a$  e  $b$ , por exemplo, são  $a = 10$  unidades da escala auxiliar e  $b = -2$  unidades da escala auxiliar,  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  da ordem de  $10^{-3}$  u.E.,  $w$  da ordem de  $10^{-7}$  rad/s. O  $\cos wt$  ou  $\operatorname{sen} wt$  podem ser tomados como iguais a 1. Então na eq.(196):

$$\sigma_{\Delta N} \approx 1 \cdot \sigma_a = 10^{-3} \text{ u.E.} = 10^{-3} \cdot 10,00007' = 0,6'' \quad (198)$$

e também o mesmo valor para a propagação de  $\sigma_b$ . Entretanto, se o valor típico de  $\sigma_a$  for da ordem de  $10^{-2}$ , como ocorre algumas vezes, este valor chega a  $6''$  de arco, apenas em relação a  $a$ . Some-se a isto a influência de  $b$ , e do  $w$  que se apresenta a seguir, e pode-se concluir que o processo de aquisição de dados no método é crítico, pois a influência da localização do sinal senoidal no tempo é determinante para a precisão da medida final de azimuth.

Finalizando esta análise de propagação de erros, e retomando a eq.(194), pode-se calcular a influência de variações no  $w$  propagadas para o valor de  $\Delta N$ . Assim:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta N} &= \left( \frac{\partial \Delta N}{\partial w} \right) \sigma_w \\ &= (-a t \operatorname{sen} wt + b t \cos wt) \sigma_w \end{aligned} \quad (199)$$

o máximo deste valor ocorre quando  $\sin wt$  é igual ao  $\cos wt$  e iguais a  $45^\circ$ . Tomando-se o tempo  $t$  como igual a um período ou seja, aproximadamente 6 minutos, obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta N} &= (-10 \text{ u.E.} \cdot 360 \text{ s} \cdot 0,707 + 2 \text{ u.E.} \cdot 360 \text{ s} \cdot 0,707) \cdot \sigma_w \\ &= 2036 \text{ u.E.} \cdot \text{s} \cdot \sigma_w = 2036 \cdot 10,00007 \cdot 60'' \cdot 10^{-7} = 0,122''\end{aligned}$$

que é bem menor que o erro propagado devido aos parâmetros  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ .

#### 4.5.4.8 Cálculo do azimuth da mira a partir dos valores de $\Delta N$ ajustados pelo modelo matemático senoidal

Para finalizar os procedimentos referentes ao ajustamento senoidal dos dados no domínio do tempo, deve-se calcular o valor do azimuth da mira a partir dos dados ajustados. A tabela 13 mostra os valores obtidos utilizando-se as eq.(189) e (190).

TABELA 13 - MOSTRA OS VALORES DO AZIMUTE DA MIRA PELO AJUSTAMENTO

série	Azimute	erro padrão	série	Azimute	erro padrão
sec1	291°59'33,30"	2,05"	sec21Di2	291°59'27,40"	0,97"
sec2Di2	291°59'29,00"	2,14"	sec22Di3	291°59'28,00"	1,04"
sec3	291°59'28,90"	1,29"	sec23Di2	291°59'28,20"	1,12"
sec4	291°58'52,80"	1,41"	sec24Di1	291°59'17,90"	0,96"
sec5Di5	291°57'09,72"	1,25"	sec25Di1	291°59'25,10"	1,22"
sec8	292°01'56,71"	0,97"	sec26Di1	291°59'28,30"	0,84"
sec9Di2	292°01'56,70"	0,99"	sec27Di1	291°59'28,70"	0,84"
sec10Di2	292°02'05,45"	1,24"	sec28	291°59'49,00"	1,23"
sec11	292°02'46,20"	0,88"	sec29Di1	292°00'17,32"	1,16"
sec12Di4	292°01'00,84"	0,99"	sec30Di2	291°59'24,50"	1,02"
sec14Di3	292°01'37,89"	1,23"	sec31Di2	291°50'38,10"	1,71"
sec15Di1	292°02'06,39"	1,06"	sec32	291°59'27,10"	0,89"
sec16	292°01'54,26"	3,56"	sec34Di1	291°59'24,80"	0,94"
sec17Di1	291°59'24,40"	0,94"	sec35Di2	291°59'26,50"	1,36"
sec18Di4	291°59'30,30"	1,11"	sec36Di1	291°59'43,70"	0,87"

No cálculo da mediana dos resultados acima construiu-se a seguinte tabela de freqüências:

TABELA 14 - TABELA DE FREQUÊNCIAS DE AZIMUTES AJUSTADOS

classe	freqüência
291° 57' 09" •----- 291° 58' 06"	2
291° 58' 06" •----- 291° 59' 03"	1
291° 59' 03" •----- 291° 00' 00"	19
291° 00' 00" •----- 292° 01' 57"	6
291° 01' 57" •----- 292° 01' 54"	0
291° 01' 54" •----- 292° 02' 51"	3

Logo a mediana será:

$$M_e = 291^\circ 59' 3'' + (15,5 - 3)/19 \cdot 57'' = 291^\circ 59' 40,50''$$

e somando-se e subtraindo-se 20" a este valor obtém-se a seleção de

séries, dentro do critério estabelecido pelo erro padrão do azimute, que são: sec1, sec2Di1, sec3, sec17Di1, sec18Di4, sec19Di5, sec21Di2, sec22Di3, sec23Di2, sec25, sec26Di1, sec27Di1, sec39Di2, sec31Di2, sec32Di1, sec34Di1, sec35Di2, sec36Di1. Logo o valor médio e o desvio padrão serão:

$$\bar{A}_z = 291^\circ 59' 29,20'' \text{ e } \sigma_{n-1} = \pm 15,860''$$

e o valor médio dos erros padrões é:

$$1,302'' \text{ e } \sigma_{n-1} = \pm 0,289''$$

que oferecem uma estimativa da precisão interna ("precision") dos dados. Por outro lado, o valor do desvio padrão do azimute ajustado fornece uma estimativa de precisão do método, ou seja, o erro médio quadrático dos desvios cometido na determinação azimutal pelo Método das Passagens com Automação Parcial estima-se seja cerca de  $\pm 15,86''$ . O valor do desvio padrão da média seria então:

$$\sigma_{\bar{x}} = \pm \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (200)$$

$$\sigma_{\bar{x}} = 3,738''$$

## 4.6 ANÁLISE DE FOURIER DOS DADOS

### 4.6.1 Introdução

Nos itens anteriores foi realizada uma ampla análise dos resultados obtidos no domínio do tempo. Em seu trabalho aplicando análise espectral Jeudy(1982) a dados obtidos com o giroteodolito, esta foi realizada somente neste domínio, através da introdução de uma função espectral normalizada. Os resultados obtidos por Jeudy estão descritos no item 3.8.3 mas deve-se sempre ressaltar que o método de coleta automatizada de dados utilizado em seu trabalho é acadêmico. Outro fato a destacar é que os resultados por ele obtidos são consequência de uma alta densidade de dados amostrais tomados diante das janelas das fotocélulas colocadas em pontos fixos, previamente estabelecidos para oferecerem a melhor precisão, conforme posteriormente destacado por Vanicek(1986).

Neste trabalho, não houve este tipo de preocupação, pois amostrou-se dados ao longo de todo o movimento senoidal descrito pelo eixo de rotação do giroscópio, na tentativa de densificá-los sem a concentração de tomadas em numa região. Com isto, introduziu-se erros principalmente nas medidas próximas às extremidades do movimento senoidal, onde devido à menor velocidade do eixo, torna-se mais difícil a realização de leituras visuais pelo operador.

Por outro lado, vai-se analisar os dados obtidos com o giroteodolito no processo de coleta semi-automatizada, através da análise de Fourier do sinal principal e dos resíduos do ajustamento

realizado no item 4.5. Com isto, explora-se este tipo de análise, embora saiba-se por antecipação que os resultados obtidos não estão ao mesmo nível de precisão obtido por Jeudy, porque o processo de coleta admite os erros de observação ligados ao operador humano, com todas as suas limitações, inclusive fadiga.

#### 4.6.2 Interpolação e aplicação da Análise de Fourier

Para a realização da Transformada Discreta de Fourier para o cálculo das frequências componentes de um sinal, é necessário que os dados amostrados sejam eqüiespaçados no tempo. Neste trabalho, a aquisição de dados foi eqüiespaçada em termos de amplitudes da escala auxiliar de leituras, sendo portanto necessária a transformação sobre estas amplitudes tornando as medidas eqüiespaçadas no tempo. Este processo foi realizado através da interpolação iterativa polinomial, mediante a aplicação do programa INTERPOL.FOR (Ap.6). Assim, obtém-se os valores de amplitudes correspondentes a instantes de tempo eqüiespaçados de um valor  $\Delta$ , conforme requisita a teoria da amostragem descrita no item 2.4.2. Este valor corresponde ao intervalo médio de tempo entre os dados da amostra. Aplica-se também um filtro de altas frequências, cujo valor é de 4 vezes o intervalo de tempo  $\Delta t$ . Este processo, já descrito no item 2.4.4 e denominado smoothing, permite filtrar-se os ruídos de altas frequências que perturbam o sinal, mas sem deixar de mencionar que, sempre num processo de filtragem, uma parte da energia associada a estas frequências é perdida. Procedeu-

se também à interpolação dos resíduos obtidos no ajustamento senoidal de dados.

A transformada de Fourier aplicada sobre os dados amostrais de amplitude do movimento senoidal interpolados  $g(t)$  permite obter-se as amplitudes no domínio das frequências, e em consequência, a densidade de potência espectral associada a cada frequência.

Para a realização deste processo foi utilizado o aplicativo MATLAB, que fornece a transformada dos dados amostrais e a densidade de potência espectral associada. O tipo de saída de dados fornece uma lista de amplitudes no domínio das frequências, ou seja, valores imaginários, onde o primeiro corresponde à frequência zero ou DC, e o valor do meio do conjunto se refere à frequência crítica de Nyquist. A densidade de potência espectral associada oferece a saída da mesma forma, apenas que se refere a um número real.

Neste aplicativo está-se utilizando a FFT através do algoritmo RADIX 2 para resolver a DFT. Ressalta-se novamente, que no Apêndice 2 este algoritmo está descrito em detalhes. Mas deve-se levar em conta sempre que é necessário que o número de dados amostrais seja uma potência de 2, sendo necessário completar com zeros os arquivos até estes valores. Neste trabalho as amostras foram de 128 dados e 256 dados, dependendo do número de pontos da série e os programas aplicados a eles foram o FFTSIL.M. e o FFTSIL.M, dependendo do número de pontos. Se este situava-se entre 128 e 256 pontos, aplicou-se o FFTSIL.M. Se o número de pontos foi



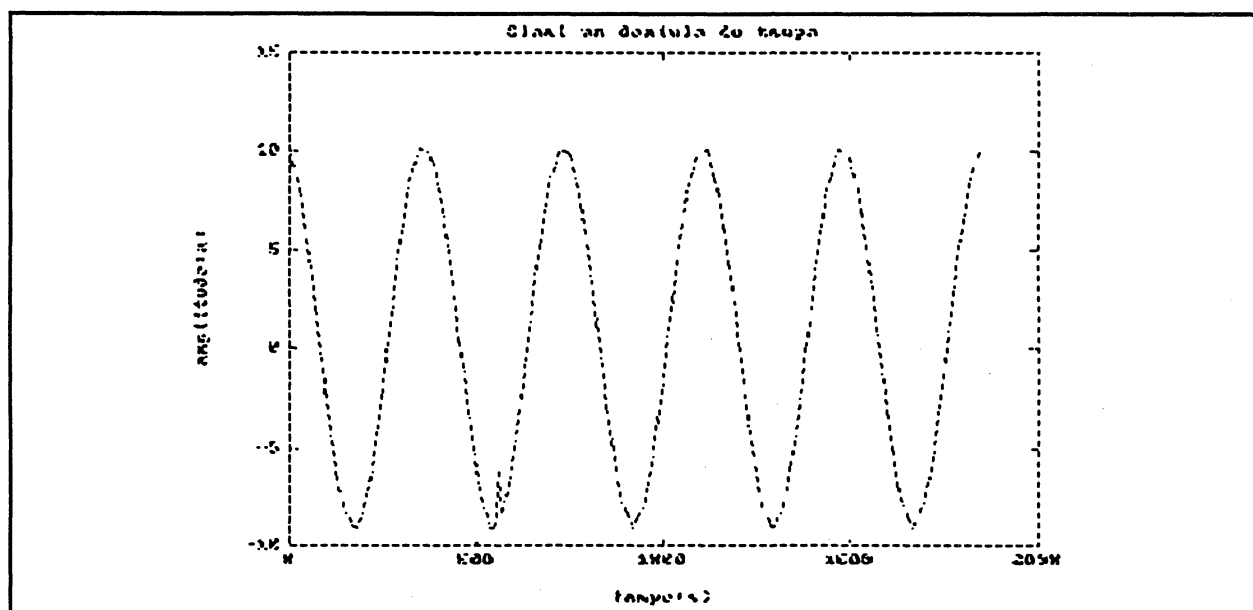
menor que 128, aplicou-se o FFTSIL1.M. A única diferença entre os dois programas é a potência de dois mais próxima, para preencher-se o arquivo com zeros até esta potência.

#### 4.6.3 Análise dos resultados obtidos

##### 4.6.3.1 Período principal de oscilação

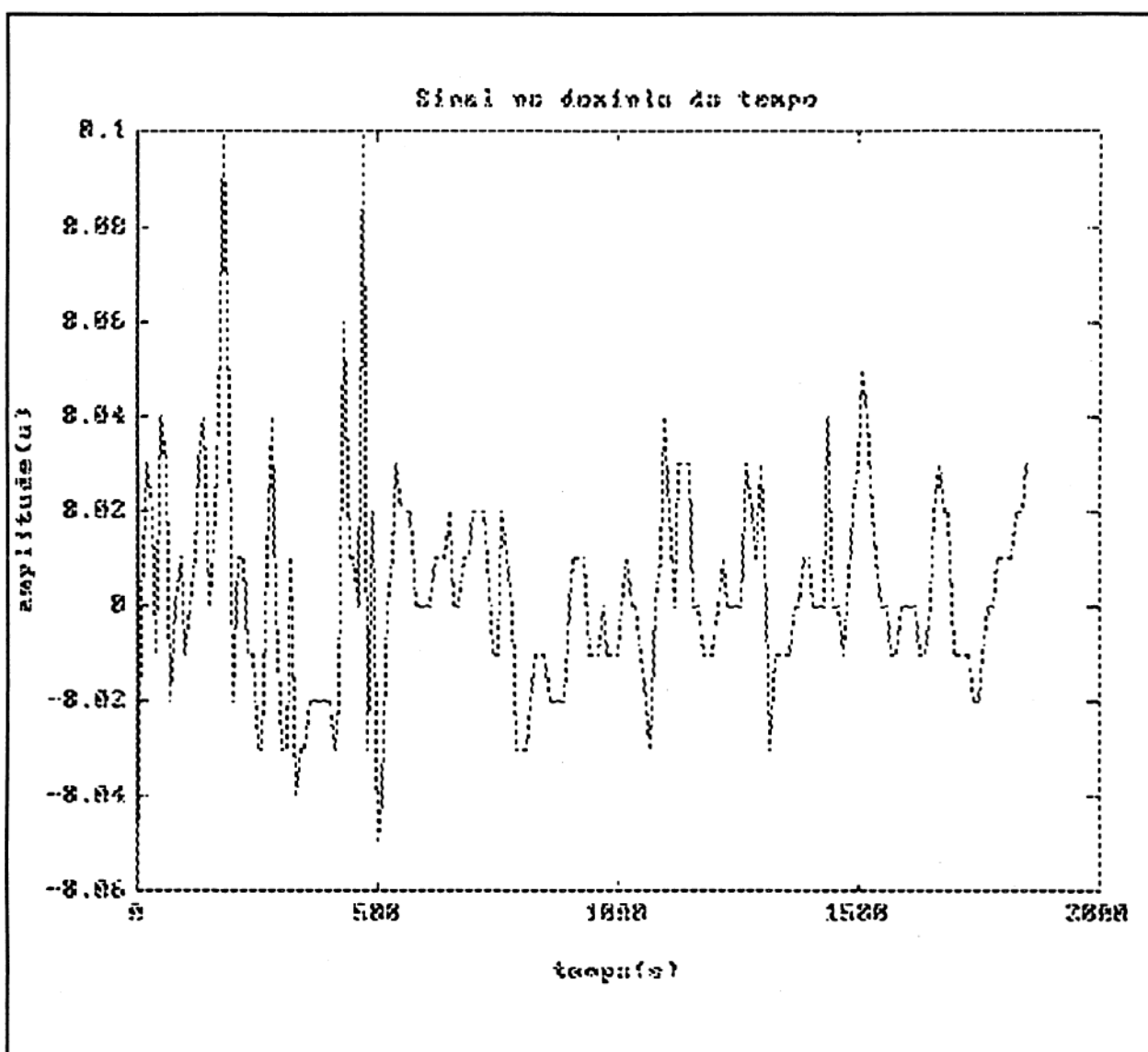
A aplicação da transformada rápida de Fourier aos dados amostrais interpolados através do programa FFTSIL.M dentro do MATLAB, permite também a visualização do comportamento original das séries, no domínio do tempo, e da densidade de potência espectral, no domínio das frequências. A fig.41 mostra o gráfico da série sec1.

FIGURA 41 - SINAL SENOIDAL DA SÉRIE SEC1



Note-se que aparecem as imperfeições cometidas no processo de aquisição de dados. De igual maneira, a representação do resíduos como se apresentam originalmente, no domínio do tempo, está apresentada na fig.42 para a série sec1.

FIGURA 42 - SINAL DOS RESÍDUOS DA SÉRIE SEC1



A densidade de potência espectral do sinal senoidal mostra a concentração de energia nas diversas frequências componentes do espectro deste. Desta forma, pode-se avaliar quais destas frequências são representativas e quais representam ruídos associados a uma série de causas, ligadas à aquisição de dados e perturbações internas do instrumento. Neste sentido, observe-se as fig.43 e fig.44 onde estão representadas a densidade de potência espectral do sinal principal e dos resíduos respectivamente. A concentração de energia em dadas frequências aparece claramente na fig.43. Já na fig.44 o quadro é bastante complexo, uma vez que somente a energia remanescente do ajustamento do sinal principal está sendo analisada e se apresenta muito mais dispersa nas diversas frequências.

FIGURA 43 - DENSIDADE DE POTÊNCIA ESPECTRAL DA SÉRIE SEC1

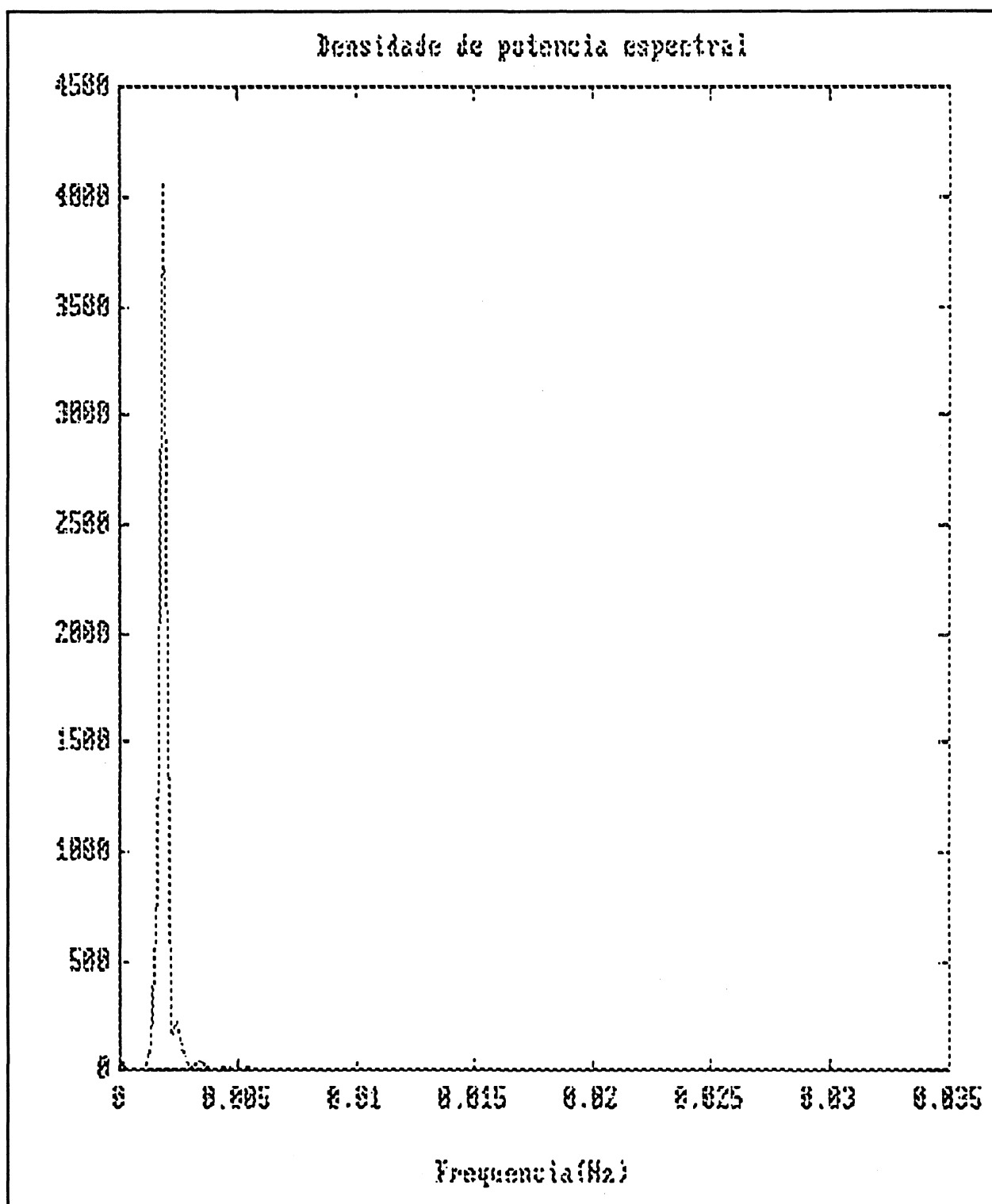
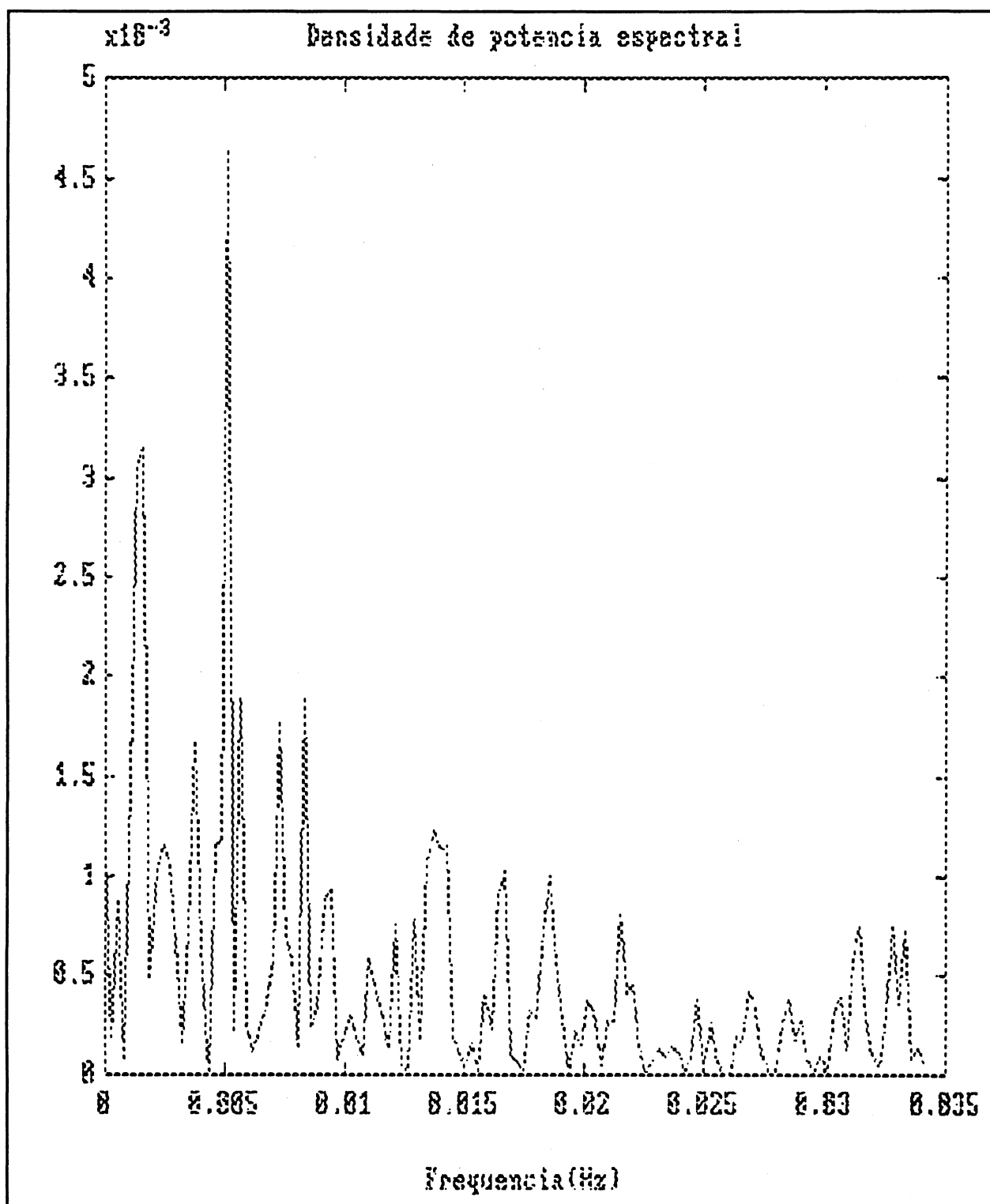


FIGURA 44 - DENSIDADE DE POTÊNCIA ESPECTRAL DOS RESÍDUOS DA SEC1



Baseados na teoria da amostragem do sinal para a transformada discreta de Fourier, estudada no item 2.4.3, é possível encontrar os valores da frequência associada a cada ponto sobre o eixo das frequências. Sendo, na eq.(140) o tempo total de amostragem  $t_A$  igual a  $N \Delta$ , onde  $\Delta$  é o intervalo de tempo entre as amostras e  $N$  o número de amostras, então sobre o eixo das frequências tem-se:

$$n = 1 \quad \therefore \quad f_1 = 1 / t_A$$

$$n = 2 \quad \therefore \quad f_2 = 2 / t_A$$

e assim sucessivamente até o valor da frequência crítica de Nyquist, que corresponde à metade da frequência amostral( $f_s$ ), ou seja, de acordo com a eq.(136),

$$f_c = \frac{1}{2 \Delta}$$

quando os valores de frequência passam a ser os complexos conjugados dos primeiros ou frequências negativas.

Colocando-se lado a lado os valores da densidade de potência espectral, calculada pelo MATLAB, para os diversos arquivos de dados, com os correspondentes valores dos períodos de oscilação, é possível identificar a que períodos correspondem os picos de concentração de energia. Ou seja, pela identificação dos maiores valores da densidade de potência espectral, e seu período correspondente, pode-se avaliar este comportamento para todas as séries, o que permite conclusões a respeito destes períodos

representativos. A Tabela 15 mostra um exemplo para este tipo de associação que foi realizada aqui. Mostra-se na tabela apenas uma parte do arquivo.

TABELA 15 - DENSIDADE DE POTÊNCIA ESPECTRAL NOS DIVERSOS PERÍODOS

---

densidade de potência espectral(u.E.)	período( min-s)
52,13086000	0 0,0000
9,21743300	42 30,0000
0,89935260	21 15,0000
11,52296000	14 10,0000
0,05679628	10 37,5000
108,69480000	8 29,9999
860,62070000	7 5,0000
3971,82800000	6 4,2857
185,04390000	5 18,7500
229,12030000	4 43,3333
67,09830000	4 14,9999
0,36321090	3 51,8181
33,57462000	3 32,5000
36,76585000	3 16,1534
6,38506100	3 2,1429
4,71176400	2 50,0000
18,76141000	2 39,3750
11,50671000	2 30,0000
0,20859600	2 21,6666
6,89713700	2 14,2105
11,58237000	2 7,4999

---

Desta forma, constrói-se uma tabela de dados para todas as séries, mostrando os períodos (inverso das frequências) correspondentes à maior concentração de energia em cada série. Com isto, caracteriza-se o período principal de oscilação já estimado através do ajustamento dos dados, e que agora pode ser calculado através dos resultados obtidos a partir dos dados de amplitude no domínio das frequências, ou seja, a partir da análise de Fourier. A tabela 16 mostra estes valores.

TABELA 16 - VALOR DO PERÍODO PRINCIPAL DE OSCILAÇÃO DO GIROSCÓPIO

série	período principal		série	período principal	
	min	s		min	s
sec1	6	4,28	sec20Di2	6	4,28
sec2Di1	6	22,50	sec21Di2	6	4,28
sec3	7	3,33	sec23Di3	6	22,50
sec5Di5	6	2,25	sec24Di1	6	4,28
sec8	6	4,28	sec25Di1	5	50,62
sec9Di2	5	50,63	sec26Di1	6	14,00
sec10Di2	6	4,28	sec27Di1	6	48,00
sec11	6	4,28	sec28	6	4,28
sec12Di4	6	4,28	sec29Di1	6	20,99
sec14Di3	6	22,50	sec30Di2	6	4,28
sec15Di1	6	4,28	sec31Di2	6	20,99
sec16	6	4,28	sec32Di1	6	4,28
sec17Di1	6	4,28	sec34Di1	6	22,50
sec18Di4	6	4,28	sec35Di2	6	4,28
sec19Di5	6	4,28	sec36Di1	7	5,00

fornece o valor médio do período principal de oscilação do eixo de rotação do giroscópio em torno da direção do Norte giroscópico como:

$$T_m = 6 \text{ min } 14,46 \text{ s} \quad \text{e} \quad \sigma_{n-1} = 17,88 \text{ s}$$

Observe-se que a série sec4 foi excluída porque resultou um valor do período igual a 3 min 1,42 s. Este resultado comparado aos outros determinou sua exclusão do cálculo da média e pode-se atribuir ao fato de a série ser muito curta, contribuindo isto para este prejuízo ao resultado final. Este fato é importante para concluir-se que, do mesmo modo que no ajustamento senoidal retirou-se um intervalo de aquisição de dados entre 20 e 30 minutos, não deve-se utilizar séries com número de oscilações menor que tres, porque a baixa densidade amostral influencia os resultados finais.



Neste sentido, ressalta-se que o método foi concebido para tentar-se melhorar a estimativa final de precisão apoiando o processo de ajustamento senoidal dos dados numa densidade de dados muito maior que a obtida na aquisição de dados do Método das Passagens tradicional. Portanto, deve-se determinar um número mínimo de dados temporais, em torno de tres oscilções do eixo, para ter maior segurança no sucesso do processo de ajustamento.

#### 4.6.3.2 Estudo da distribuição de energia

No item anterior considerou-se apenas os picos de energia para o cálculo da freqüência principal do movimento de oscilação do eixo de rotação do giroscópio. Entretanto, existe uma distribuição não tão concentrada de energia próxima a este pico, conforme verificado na fig.43. Devido a este fato, foi construída uma tabela compartimentalizando esta distribuição, onde foram adicionadas as densidades de potência espectral de todas as séries, contidas em cada compartimento de períodos componentes do sinal. A Tabela 17 mostra estes resultados. Por outro lado, mesmo visualmente demonstra-se a alta concentração de energia em torno da freqüência de  $2,5 \times 10^{-3}$  Hz, que corresponde a um período de 6 minutos.

TABELA 17 - DISTRIBUIÇÃO DA DENSIDADE DE POTÊNCIA ESPECTRAL NOS DIVERSOS PERÍODOS COMPONENTES DO SINAL COMPLEXO

A normalização da energia residente em cada compartimento

---

compartimento de período (min)	energia(u.e)	energia normalizada
1,0 ---- 1,5	988,71055	722,02
1,5 ---- 2,0	1127,83059	1239,50
2,0 ---- 2,5	1749,38000	1758,94
2,5 ---- 3,0	2410,07000	2321,00
3,0 ---- 3,5	2715,56420	2674,00
3,5 ---- 4,0	2857,90340	2678,95
4,0 ---- 4,5	2285,37590	2916,70
4,5 ---- 5,0	4240,12000	8021,27
5,0 ---- 5,5	21319,80238	14587,60
5,5 ---- 6,0	11471,14200	38260,75
6,0 ---- 6,5	108782,54210	58646,00
6,5 ---- 7,0	5561,63090	34657,00
7,0 ---- 7,5	18724,28270	11186,60
7,5 ---- 8,0	1737,78600	5930,60
8,0 ---- 8,5	1522,60630	1195,55
8,5 ---- 9,0	0,00000	412,30
9,0 ---- 9,5	127,92390	89,89
9,0 ---- 10,0	103,42870	83,69

---

foi feita utilizando-se o filtro de Hamming, para eliminar efeitos de borda devidos à divisão arbitrária dos limites dos compartimentos(Freitas et alli,1991). O filtro é dado por:

$$V_k = \frac{1}{4} ( V_{k+1} + 2 V_k + V_{k-1} ) \quad (200)$$

onde :

$V_k$  é o valor da soma das energias no k-ésimo compartimento;

$V_{k+1}$  é o valor da soma das energias no compartimento k+1;

$V_{k-1}$  é o valor da soma das energias no compartimento k-1.

A fig.45 mostra um gráfico da distribuição compartimentada de energia em função do período. Observe-se que

procedeu-se a uma ajustamento de um polinômio de grau 8 aos dados como afim de realizar-se a análise estatística correspondente, colocada na Tabela 18.

FIGURA 45 - DISTRIBUIÇÃO TOTAL DE ENERGIA COM O PERÍODO

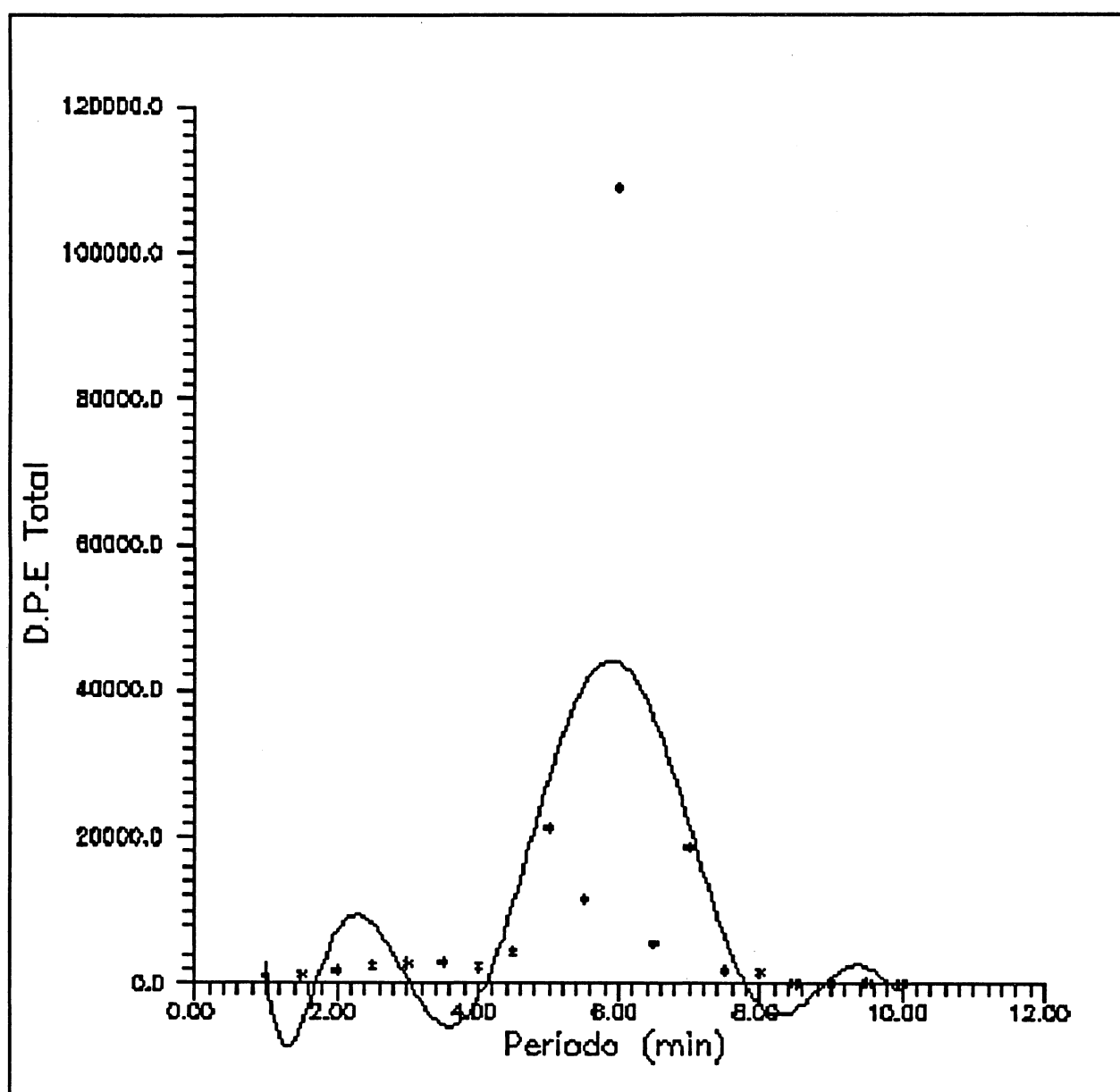


TABELA 18 - ESTATÍSTICA CORRESPONDENTE AO AJUSTAMENTO DE UM

## POLINÔMIO DE GRAU 8 À DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA

grau	soma dos quadrados dos resíduos	percentagem de resíduos ao redor da média	coef. polinomiais
0	$1,10018 \times 10^{10}$	0	672436
1	$1,09888 \times 10^{10}$	0,12	-1728540
2	$9,32126 \times 10^9$	15	1717260
3	$9,17799 \times 10^9$	17	-868595
4	$8,09085 \times 10^9$	26	247753
5	$7,75788 \times 10^9$	29	-41348,8
6	$7,12323 \times 10^9$	35	3997,06
7	$6,67903 \times 10^9$	39	-207,135
8	$6,35685 \times 10^9$	42	4,45122

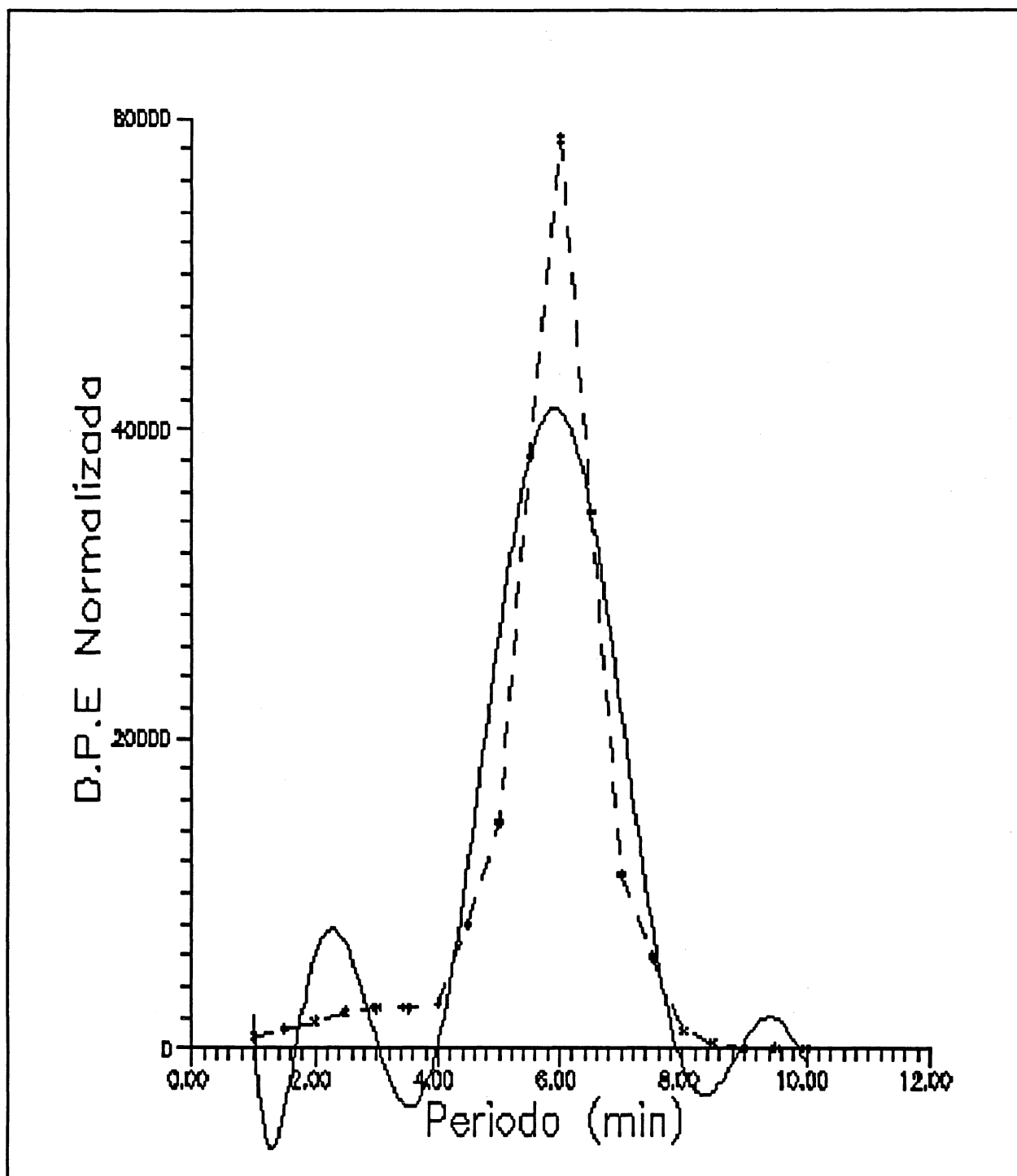
De igual maneira, pode-se ajustar um polinômio de grau 8 ao gráfico que relaciona as energias compartmentadas ao período de oscilação. A Tabela 19 apresenta estes resultados.

TABELA 19 - ESTATÍSTICA CORRESPONDENTE AO AJUSTAMENTO DE UM POLINÔMIO DE GRAU 8 À ENERGIA NORMALIZADA

grau	soma dos quadrados dos resíduos	percentagem de resíduos em torno da média	coef. polinomiais
0	$4,72786 \times 10^9$	0	529085
1	$4,71415 \times 10^9$	0,29	-1365270
2	$3,09868 \times 10^9$	34	1361810
3	$2,96555 \times 10^9$	37	-691018
4	$2,00749 \times 10^9$	58	197490
5	$1,71614 \times 10^9$	63	-32974,1
6	$1,23271 \times 10^9$	74	3184,31
7	$9,22107 \times 10^8$	80	-164,665
8	$7,19717 \times 10^8$	85	3,528

A figura correspondente a este último procedimento é a fig.46.

FIGURA 46 - REPRESENTA O AJUSTAMENTO DE UM POLINÔMIO À DISTRIBUIÇÃO COMPARTIMENTADA DE ENERGIA NORMALIZADA



Desta figura pode-se também concluir que o período médio da frequência principal é de cerca de 6 minutos. Outras conclusões a

respeito deste estudo estão apresentadas no Cap.V, mas observa-se que realmente a concentração de energia ocorre intensamente na região que contém o período principal de oscilação, embora uma pequena concentração de energia possa ser também observada em torno de 3,5 minutos, onde de acordo com Jeudy(1980) encontra-se outro período sobreposto ao primeiro da função senoidal.

#### **4.6.3.3 Estudo da energia associada aos resíduos**

Os resíduos do ajustamento senoidal interpolados foram também submetidos à análise de Fourier. Isto porque esperava-se detectar outra frequência componente do movimento senoidal do eixo de rotação do instrumento, correspondendo a uma concentração residual de energia. É claro que esta análise é mais complexa que a anterior, uma vez que os dados já foram filtrados de altas oscilações no "smoothing" aplicado junto com o processo de interpolação. Entretanto, sempre é possível permanecerem componentes de altas frequência que não foram devidamente filtradas. Para a análise tornar-se mais consistente vai-se proceder ao mesmo tratamento de compartimentalização da energia de acordo com as frequências(ou períodos). Para isto, apresenta-se a Tabela 20 que mostra a distribuição de energia dos resíduos nos mesmos compartimentos utilizados na análise do item anterior.

TABELA 20 - DISTRIBUIÇÃO DE ENERGIA NOS RESÍDUOS  
COMPARTIMENTADOS E NORMALIZADOS COM O PERÍODO

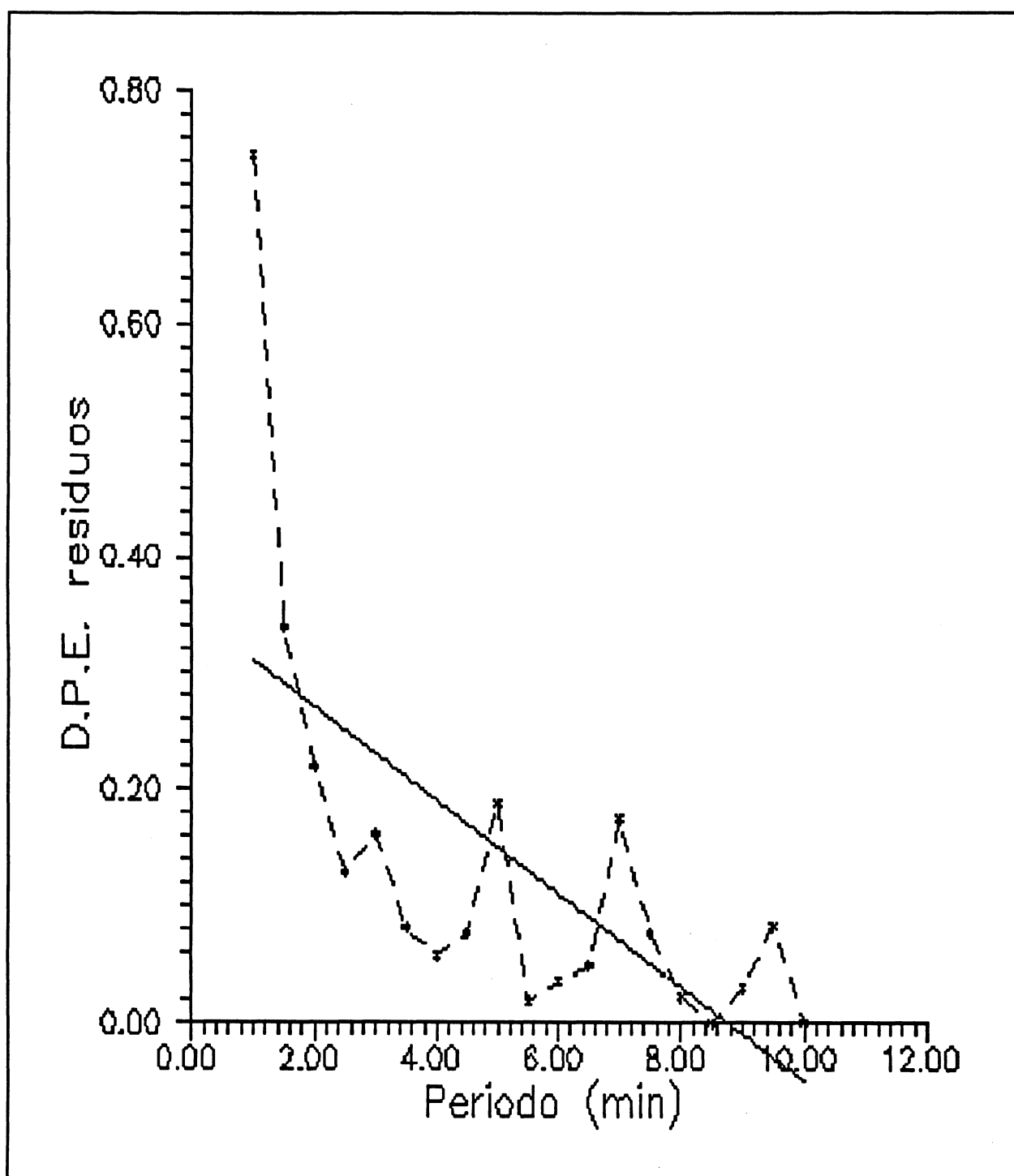
compartimento de período(min)	energia(u.e.)	energia normalizada
1,0 ---- 1,5	$74,3811 \times 10^{-2}$	$45,6984 \times 10^{-2}$
1,4 ---- 2,0	$34,0314 \times 10^{-2}$	$41,0951 \times 10^{-2}$
2,0 ---- 2,5	$21,9368 \times 10^{-2}$	$22,7237 \times 10^{-2}$
2,5 ---- 3,0	$12,9368 \times 10^{-2}$	$16,0283 \times 10^{-2}$
3,0 ---- 3,5	$16,1961 \times 10^{-2}$	$13,3833 \times 10^{-2}$
3,5 ---- 4,0	$8,1505 \times 10^{-2}$	$9,5691 \times 10^{-2}$
4,0 ---- 4,5	$5,7793 \times 10^{-2}$	$6,8377 \times 10^{-2}$
4,5 ---- 5,0	$7,6418 \times 10^{-2}$	$9,9661 \times 10^{-2}$
5,0 ---- 5,5	$18,8017 \times 10^{-2}$	$11,7779 \times 10^{-2}$
5,5 ---- 6,0	$1,8660 \times 10^{-2}$	$6,5410 \times 10^{-2}$
6,0 ---- 6,5	$3,6293 \times 10^{-2}$	$3,5171 \times 10^{-2}$
6,5 ---- 7,0	$4,9434 \times 10^{-2}$	$7,7727 \times 10^{-2}$
7,0 ---- 7,5	$17,5748 \times 10^{-2}$	$11,9411 \times 10^{-2}$
7,5 ---- 8,0	$7,6716 \times 10^{-2}$	$8,8005 \times 10^{-2}$
8,0 ---- 8,5	$2,2841 \times 10^{-2}$	$3,0599 \times 10^{-2}$
8,5 ---- 9,0	0,0000	$1,3308 \times 10^{-2}$
9,0 ---- 9,5	$3,0394 \times 10^{-2}$	$1,7267 \times 10^{-2}$
9,5 ---- 10,0	$0,8281 \times 10^{-2}$	$0,2070 \times 10^{-2}$

A fig.47 mostra a distribuição de energia associada aos resíduos nos compartimentos. Note-se que o comportamento é distorcido pelos valores iniciais, que correspondem a altas freqüências. O tratamento polinomial dados a estes resíduos corresponde a tentar-se encontrar uma tendência de comportamento, através de uma reta. A estatística deste tratamento está apresentado na Tabela 21.

TABELA 21 - ESTATÍSTICA DOS RESÍDUOS AJUSTADOS

grau	soma dos quadrados dos resíduos	percentagem dos resíduos em torno da média	coef. polinomiais
0	0,533813	0	0,3516040
1	0,304886	43	-0,0400812

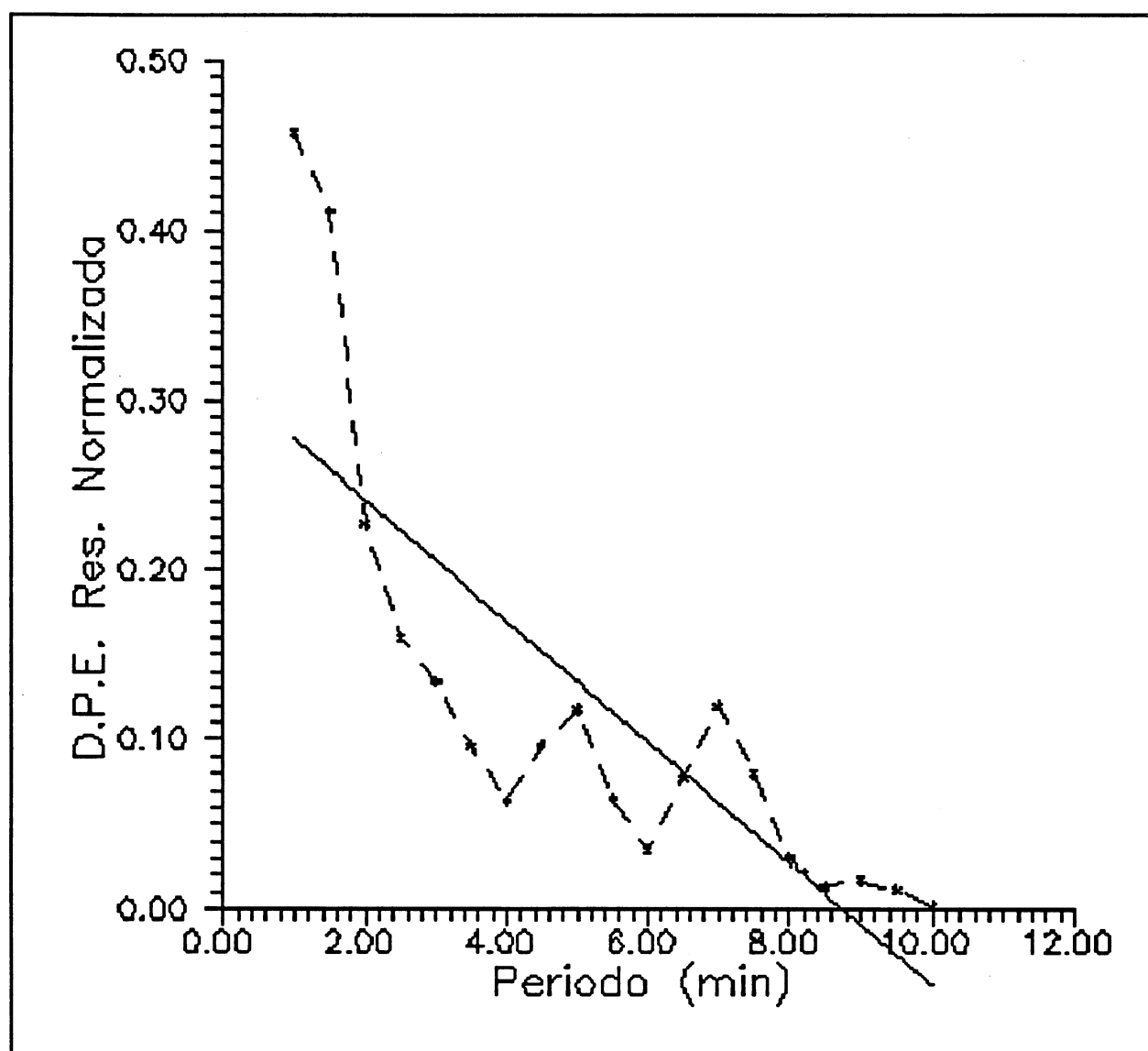
FIGURA 47 - DISTRIBUIÇÃO COMPARTIMENTADA DE ENERGIA ASSOCIADA  
AOS RESÍDUOS DO AJUSTAMENTO SENOIDAL





A fig.48 mostra o gráfico dos resíduos compartmentados normalizados de acordo com o filtro apresentado na eq.(204). Observe-se que devido à normalização, o padrão de comportamento é mais visível.

FIGURA 48 - GRÁFICO DOS RESÍDUOS COMPARTIMENTADOS NORMALIZADOS E A TENDÊNCIA DE COMPORTAMENTO DESTES



A estatística correspondente esta mostrada na Tabela 22.

**TABELA 22**      **ESTATÍSTICA PARA O GRÁFICO DOIS RESÍDUOS**  
**COMPARTIMENTADOS**      **NORMALIZADOS**

grau	soma dos quadrados dos residuos	porcentagem dos residuos em torno da média	coef. polimomiaais
0	0,284766	0	0,3129170
1	0,103216	64	-0,0356936

As conclusões e recomendações finais tiradas a partir desta análise de dados encontram-se no Cap V. Entretanto, é importante aprofundar aqui alguns aspectos descritivos do processo de análise espectral aqui realizado. Em primeiro lugar, optou-se por uma descrição polinomial (de grau 8) para descrever o comportamento do sinal principal porque deste modo pode-se ter uma confirmação visual dos resultados já obtidos, ou seja, existe uma grande concentração de energia associada a um período em torno de 6 minutos para o sinal principal. Por outro lado, não detectou-se na análise dos resíduos a concentração de energia detectada por Jeudy(1980) em torno de metade deste valor, ou seja, 3 minutos. O comportamento dos resíduos foi descrito de modo a mostrar a tendência das frequências, com a predominância da influência de aspectos de aquisição de dados ligados aos parâmetros a e b, mas também deve-se ressaltar que parte desta energia remanescente pode ser associada à natação, ou seja, a trocas temporárias de energia que, conforme ressaltado anteriormente, provocam a pequena oscilação na marca de referência. Estes aspectos comprovam a complexidade que a análise de um sinal composto deste tipo envolve.

## CAPÍTULO V

### CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

#### 5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se as conclusões a respeito do trabalho aqui desenvolvido. Este, pode ser descrito como composto por três aspectos complementares. O primeiro aspecto, o da fundamentação, compõe-se de dois pontos: o aprofundamento teórico nos princípios físicos da Dinâmica de Rotação e o estudo da teoria da Análise Espectral de Fourier, aplicada a sinais temporais.

O segundo aspecto, é o da concepção de um novo método de aquisição de dados para o instrumento giroteodolito GAK-1, visando melhorar a precisão das medidas realizadas sem qualquer alteração no instrumento. Na realidade, o método, que deriva do método das passagens, apoia-se essencialmente na utilização de um microcomputador associado para a aquisição de dados e análise sistemática destes ainda no campo.

O terceiro aspecto é o da análise dos dados e resultados obtidos pelo método. Esta análise é desdobrada nos dois domínios, do tempo e das frequências, visando um estudo da potencialidade da técnica e identificação dos principais fatores que podem influenciar a precisão. O método foi eficaz, dentro de suas possibilidades, sendo indicada uma melhora na precisão nas determinações azimutais, com o ajustamento senoidal dos dados

referentes ao sinal periódico, que representa o movimento do eixo de rotação do giroscópio em torno do Norte giroscópico. A análise da distribuição de energia nas diversas frequências, permitiu avaliar a estrutura do sinal complexo.

## **5.2 ANÁLISE CRÍTICA AO MÉTODO DAS PASSAGENS COM AUTOMAÇÃO PARCIAL**

### **5.2.1 Vantagens do método**

O Método das Passagens com Automação Parcial desenvolvido neste trabalho oferece uma série de vantagens em comparação com os outros métodos citados durante o trabalho.

Em primeiro lugar, na comparação com o Método das Passagens tradicional, pode-se afirmar que a maior densidade de dados é o fator preponderante para obter-se uma melhor acurácia na determinação de azimute de uma direção. Tome-se como exemplo os resultados obtidos aqui. Pelo Método das Passagens obteve-se este valor em torno de  $\pm 29''$ , enquanto a estimativa de acurácia do Método com Automação Parcial é de cerca de  $\pm 15''$  de arco na determinação de azimute. A baixa densidade de dados no Método das Passagens tradicional permite que exista uma grande influência dos erros cometidos pelo operador, fato este que no segundo método se dilui devido ao número muito maior de instantes cronométricos de passagens por pontos da escala auxiliar registrados.

Outro ponto extremamente positivo é que imediatamente após encerrar-se, no campo, o processo de aquisição de dados,

pode-se proceder ao ajustamento destes com o software aqui desenvolvido implantado no mesmo microcomputador portátil utilizado na aquisição. Os parâmetros ajustados, o número de iterações e o valor final do  $\sigma_0$  a posteriori, aliados a uma tabela de valores  $\chi^2$ , permitem imediatamente a aceitação ou não de uma série de medidas. Não se deve esquecer que sempre existe o recurso de diminuir-se o tamanho das séries, numa tentativa de aproveitamento, desde que limitado ao número mínimo de três oscilações, que o trabalho indicou como limite mínimo recomendado para o tamanho de uma série, uma vez que o método se apoia em alta densidade de dados para diminuir os efeitos da operação manual do microcomputador.

Respeitando-se os limites de tempo de realização de medidas, sugerido ser entre 20 e 30 minutos para cada série, conforme pode ser constatado na Tabela 12, evita-se a fadiga natural do operador e, por outro lado, se for necessário repetir-se a medida, o tempo total seria em torno de 60 minutos desde o início do processo de aquisição até o encerramento da amostragem temporal. Isto torna as campanhas no campo mais econômicas, pois conforme demonstrou-se, mais de 70 % das séries são aproveitadas com menos de 30 minutos de observação. O aumento da duração das séries, de forma geral, causa um decréscimo na precisão, conforme estimativa obtida, o que é natural devido à fadiga do operador e mudança nas condições experimentais (deriva, atenuação, etc.). Os resultados finais de azimuth de direções neste método possuem uma precisão estimada como maior que na metodologia tradicional.

### **5.2.2 Considerações a respeito da cinta de suspensão**

Um aspecto que não foi aprofundado durante o trabalho é o referente à influência da cinta de suspensão sobre os resultados. Note-se que todas as transformações de unidades da escala auxiliar para unidades angulares foram baseadas num único valor, determinado para a latitude de observação como aproximadamente  $10,00007''/s$ . Ocorre que este cálculo utilizou um fator de torção da cinta tabelado, e que não prevê sua modificação com o tempo, tais como o possível alongamento devido à tração constante exercida pelo giroscópio sobre ela, e fadiga devido à torção e influência da temperatura. No Laboratório de Aferição da UFPR, a influência da variação de temperatura é minimizada pelas condições ambientes estáveis no recinto. Entretanto, não se tem conhecimento sobre os outros fatores mecânicos referentes à estrutura interna da cinta. Já no campo, além destes fatores, pode existir vento causando trepidação no instrumento.

### **5.2.3 Considerações sobre os resultados obtidos com grande número de séries**

O ajustamento polinomial da reta tipo  $y = K$  realizado utilizando-se os arquivos sec constitui-se apenas num procedimento acadêmico de investigação a que se procedeu aqui. Em termos de aplicação prática ele é anti-econômico devido ao fato de necessitar um grande número de séries realizadas num mesmo ponto para oferecer uma precisão melhor que os  $20''$  de arco preconizados pelo manual

para o erro médio do desvio padrão azimutal ou 30" de arco como mostra a prática. Chegou-se a 10" porém com a eliminação de um grande número de séries, a partir da análise pela mediana. O principal problema com este método é a necessidade da determinação precisa do fator de conversão de unidades de escala auxiliar para unidades angulares, que é função do fator de torção da cinta, ressaltado no item anterior.

#### **5.2.4 Processo de determinação do período principal do movimento giroscópico pelo MMQ**

O processo de ajustamento de dados pelo método paramétrico revela aspectos muito importantes. A rejeição de uma série longa pode significar que, a partir de determinado ponto do movimento oscilatório do eixo de rotação do giroscópio em torno da direção do Norte giroscópico, a atenuação passa a ser maior e, mesmo que visualmente não se tenha a percepção disto, o modelo matemático no qual se apoia o ajustamento de dados passa a não descrever o fenômeno físico que está ocorrendo, de maneira adequada. Ou seja, este modelo deixa de ser apropriado devido à atenuação, e isto se reflete na rejeição das séries longas. A partir do momento que se diminui a extensão dos arquivos de dados, a partir do seu final, de um número inteiro de oscilações, passa-se a eliminar estes últimos dados com atenuação mais acentuada, e por isto o modelo matemático pode voltar a descrever corretamente o fenômeno físico, e a série passa a ser aceita. Outro fato importante, a alta concentração de resíduos maiores junto às

amplitudes extremas, é explicado pelo fato que nestas, o movimento da marca auxiliar é mais lento, dificultando as leituras visuais desta marca. Entretanto, pelo fato de haver convergência e aceitação da maioria das séries, acredita-se que este efeito seja diluído pelos outros dados que ocorrem em densidade muito maior que a densidade de dados nas extremidades, que correspondem a relativamente poucos pontos amostrais.

#### **5.2.5 Propagação de erros para o azimuth no ajustamento senoidal.**

Um questionamento que poderia-se fazer é o fato de não levar-se em conta a marcha do relógio. Na realidade, esta poderia ser incluída no processo de ajustamento como um quinto parâmetro. Mas, como a estabilidade do relógio é muito maior que o erro propagado para o azimuth devido à ação do operador humano sobre a coleta de dados, e que se reflete na fase do sinal que é registrada, não introduziu-se este parâmetro. Ou seja, são os erros cometidos nos parâmetros  $\mu$ ,  $a$  e  $b$  que irão se propagar e influenciar de maneira majoritária os resultados de determinação azimutal.

#### **5.2.6 Período do movimento oscilatório**

Os cálculos do período principal do movimento senoidal através do ajustamento dos dados conduziram ao valor:



$$T = 6 \text{ min } 13,947 \text{ s} \quad \text{e} \quad \sigma_{n-1} = \pm 0,497 \text{ s}$$

e através da análise de Fourier a:

$$T = 6 \text{ min } 14,46 \text{ s} \quad \text{e} \quad \sigma_{n-1} = \pm 17,880 \text{ s}$$

sendo que o desvio padrão deste último é consequência da largura da banda do sinal. Estes demonstram grande coerência entre si. Já o resultado obtido por Jeudy (1982) para os outros períodos das componentes do movimento senoidal não foram aqui determinados. No processo de ajustamento, isto não ocorreu porque estes outros movimentos secundários, são filtrados, pois ajusta-se apenas a oscilação principal, no modelo matemático que prevê um único parâmetro  $w$ . Mesmo Jeudy(1982) só obteve os períodos dos outros movimentos pela introdução de uma função espectral normalizada na análise dos resíduos do ajustamento. Portanto, na comparação com o trabalho de Jeudy(1982), aqui revelou-se um número menor de componentes espectrais, embora também tenha-se previsto um processo de investigação baseado nos resíduos. Os resíduos do ajustamento dos dados foram analisados por Jeudy através de uma função espectral e, neste trabalho, após ajustar-se os dados à senóide principal, construindo-se um arquivo de resíduos para cada série, que foram submetidos a uma análise espectral, somente que pelo método de Fourier, conforme referido no Cap. IV. Observou-se nesta análise, em primeiro lugar, uma dispersão de energia nas diversas frequências, com uma tendência de concentração de energia nas altas

frequências. Esta análise foi realizada até períodos de 1 minuto. Deve-se considerar que no processo de interpolação para formação de dados eqüiespaçados utiliza-se um método de interpolação pela média corrente, relacionando o ponto com suas vizinhanças via uma polinômio (nas análise procedidas, de 2º, 3º e 4º graus). Tal fato implica em aplicação de um filtro de altas frequências, eliminando sinais com períodos menores que 40 s. No entanto, a utilização de tal procedimento causa também ruídos nas frequências remanescentes, uma vez que formam um novo sinal resultado da associação de uma seqüência de interpolações polinomiais. Este porém, guarda todos os sinais com períodos maiores que 40 s. Para as frequências altas, contribui também a nutação (wobble), claramente observada nas oscilações da marca de referência. Mesmo que esta represente apenas uma transferência temporária de energia, causa perturbação na leitura da marca de referência nos pontos da escala auxiliar.

Considerando o claro decréscimo dos ruídos das altas para as baixas frequências, para o qual contribui também a nutação, observa-se alguma concentração de energia em torno de 3,5 min, conforme previsto por Jeudy(1982). No entanto, toda a análise da concentração de energia dos ruídos está limitada pela aquisição de dados. A queda dos ruídos em direção às baixas frequências indica claramente que a atenuação não tem significado nesta análise, sendo adequado o modelo de ajustamento proposto. É importante frisar que, mesmo não se obtendo um resultado comparável aos obtidos por Jeudy, devido às limitações mencionadas, esta análise é inédita pois Jeudy(1982) trabalhou somente no domínio do tempo, e não no domínio

das frequências como aqui. Além disto, o trabalho de Jeudy, conforme já ressaltou-se, é acadêmico, sem aplicação prática no campo, enquanto a análise aqui realizada possui caráter aplicativo imediato.

#### **5.2.7 Conclusões sobre a distribuição compartimentada de energia**

A distribuição compartimentada e depois normalizada permite a visualização do comportamento geral das séries. Ela mostra que o comportamento de todas as séries apontou para um valor característico de período de oscilação previsto teóricamente. Este tipo de análise, embora empregado em outras áreas, é inédito na análise do movimento de oscilação do eixo de rotação do giroscópio, e constitui-se também numa contribuição deste trabalho.

#### **5.2.8 Resultados finais do azimute da direção da mira**

Os resultados finais para o azimute da direção da mira são os seguintes:

a) pelo Método das Passagens com cronômetro manual:

$$A_z = 292^{\circ} 00' 13,41'' \quad \text{com} \quad \sigma_{n-1} = \pm 29,42''$$

b) pelo Método da Passagens utilizando-se o Microcomputador como cronógrafo:

$$A_z = 291^\circ 58' 51,80'' \quad \text{com} \quad \sigma_{n-1} = \pm 9,86''$$

c) Pelo ajustamento de uma reta tipo  $y = k$  aos dados obtidos com o microcomputador como cronógrafo:

$$A_z = 292^\circ 00' 04,74'' \quad \text{com} \quad \sigma_{n-1} = \pm 11,32''$$

d) pelo ajustamento senoidal aos dados no domínio do tempo:

$$A_z = 291^\circ 59' 29,90'' \quad \text{com} \quad \sigma_{n-1} = \pm 15,86''$$

Adota-se este último valor como representativo do resultado final deste trabalho, ou seja, como o azimuth da direção do colimador optico do Laboratório de Aferição da UFPR, porque é o resultado coerente com a análise do maior número de séries. Os resultados expressos em b) e c) embora aparentemente ofereçam um erro menor na determinação de azimuth, somente foram obtidos após a limitação do número de séries, seguindo critérios estatísticos.

### 5.3 RECOMENDAÇÕES

Algumas recomendações podem ser feitas na aplicação do Método das Passagens com Automação Parcial:

a) No processo de tomada de dados, controlar sempre o nível de carga da bateria durante a aquisição de dados, não permitindo a

operação próxima do limite mínimo de carga porque neste limite o "wobble" ou oscilação rápida da marca de referência percebida visualmente se acentua, prejudicando enormemente as leituras.

b) Realizar sempre determinações correspondentes a oscilações (períodos) completos para evitar distorções causadas pelos dados para qualquer dos lados da senóide.

c) Não permanecer em processo de coleta de dados mais tempo do que o método requisita (de 20 a 30 minutos) para a precisão estimada em torno de 15". Mais claramente, as operações no campo são normalmente dispendiosas e deve-se procurar otimizar os resultados de uma campanha. Além disto, o processo de fadiga do operador tende a se acentuar após este tempo, uma vez que o processo de aquisição de dados exige atenção constante a todas as passagens da marca de referência pelos pontos da escala auxiliar de leituras.

d) Após realizar o ajustamento dos dados no campo, e não obtendo-se a aceitação da série, pelo critério de  $\chi^2$  deve-se diminuir o arquivo de dados editando o mesmo. Esta diminuição pode ser de uma ou duas oscilações, e deve-se então tornar a ajustar o arquivo. Somente no caso de ainda persistir a rejeição para séries com tres períodos completos, é que deve-se realizar uma nova determinação de azimute do ponto.

e) Realização da determinação do fator de conversão de unidades da

escala auxiliar para segundos de arco periodicamente, para atualização e incrementar a precisão dos resultados. Para isto, deve-se ocupar um ponto que possua uma mira de azimuth astronômico conhecido com precisão de no mínimo 1" e realizar-se aí algumas séries de observação. Recomenda-se também a realização desta determinação sob diferentes condições para verificação de possíveis influências climáticas.

#### 5.4 ENCERRAMENTO

Para finalizar este trabalho, dois aspectos devem ser ponderados.

O primeiro deles é o aspecto prático deste, pois espera-se haver contribuído com os usuários do giroteodolito WILD GAK-1, no sentido de otimizarem suas determinações com o instrumento, e que, através do Método das Passagens com Automação Parcial, possam obter resultados com maior precisão na determinação azimuthal que os oferecidos pelo Método das Passagens tradicional. Além disso, a introdução do microcomputador portátil no processo de aquisição e processamento no próprio local da determinação permite que os procedimentos e cálculos se tornem muito mais rápidos e poderosos.

O segundo aspecto é o da pesquisa científica realizada a partir dos dados obtidos com o instrumento, não só pela ampla análise realizada no domínio do tempo, como também pela análise realizada no domínio das frequências, através da aplicação das transformadas de Fourier. Espera-se que este trabalho, possa servir

como subsídio para outros trabalhos que necessitem quer dos aspectos físicos revistos, quer da ferramenta matemática tão poderosa denominada genericamente de Análise de Fourier.

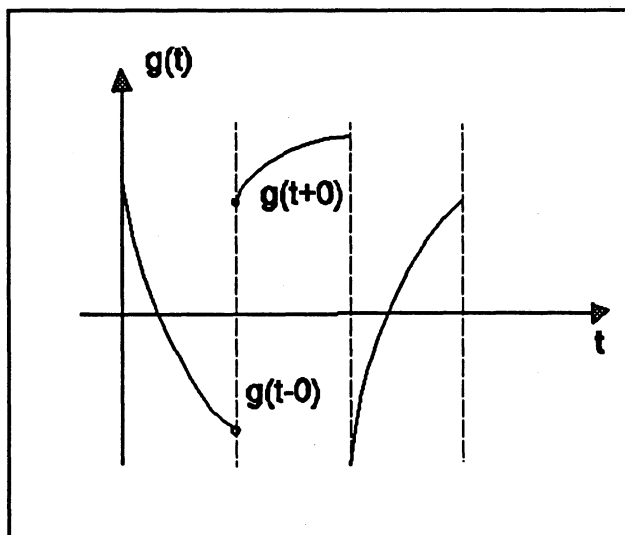
## APÊNDICE 1 : SÉRIES DE FOURIER - Conceitos Básicos

Neste estudo de movimentos periódicos, algumas definições básicas devem ser mencionadas pois constituem elemento fundamental citado em todos os livros sobre este assunto. Não cabe neste trabalho a demonstração matemática destes conceitos, que podem ser encontradas em Spiegel(1976) e Kreyszig(1977).

**1. Funções Periódicas:** diz-se que uma função  $g(t)$  é periódica se  $g(t + n T) = g(t)$  sendo  $T$  o período do movimento em segundos e  $n$  um número inteiro qualquer.

**2. Funções Seccionalmente Contínuas:** diz-se que uma função  $g(t)$  é seccionalmente contínua em um intervalo se existe nele um número finito de descontinuidades finitas. A figura abaixo mostra um exemplo:

FIGURA A.1.1 - EXEMPLO DE FUNÇÕES SECCIONALMENTE CONTÍNUAS





### 3. Condições de Dirichlet.

Supondo-se que:

- (i)  $g(t)$  seja definida em um número finito de pontos no intervalo  $(-T/2, T/2)$
- (ii)  $g(t)$  seja periódica de período  $(T)$ , ou seja de acordo com a definição 1),  $g(t+T)=g(t)$  ; observe-se que entre  $(-T/2)$  e  $(T/2)$  tem-se dois meios-períodos, ou seja,  $2.(T/2) = 1 T$ .
- (iii)  $g(t)$  e  $g'(t)$  sejam seccionalmente contínuas no intervalo entre  $(-T/2, T/2)$

então a série de Fourier definida a seguir, converge para:

- a)  $g(t)$  se  $t$  for ponto de continuidade
- b)  $\{g(t+0)+g(t-0)\}/2$  se  $t$  for ponto de descontinuidade

4. Identidade de Parseval: esta identidade afirma que

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \{g(t)\}^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (\text{a.1.1})$$

onde  $a_n$  e  $b_n$  são os coeficientes de Fourier correspondentes a  $g(t)$  e se  $g(t)$  satisfizer as condições de Dirichlet (Spiegel, 1976).

5. Séries de Fourier (Fórmulas de Euler): suponha-se que  $g(x)$  seja uma função periódica de período  $2\pi$  e que possa ser representada pela série trigonométrica (Kreyszig, 1977; Cheng, 1959):

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (\text{a.1.2})$$

onde  $a_0$ ,  $a_n$  e  $b_n$  são os coeficientes dados pela fórmulas de Euler:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos nx dx \quad (\text{a.1.3})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx dx$$

então a série:

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

é chamada série de Fourier correspondente a  $g(x)$  e seus coeficientes são calculados pelas (a.1.3), podendo ser representada genericamente pela eq.(a.1.2).

**6. Séries de Fourier na forma temporal:** a passagem da função  $g(x)$  com período  $2\pi$  para funções com um período  $T$  qualquer pode ser feita introduzindo-se uma nova variável de tal maneira que  $g(t)$  como função de  $x$  possua o mesmo período  $2\pi$ . Assim,

$$t = \frac{T}{2\pi} x \rightarrow x = \frac{2\pi}{T} t \quad (\text{a.1.4})$$

então  $x = \pm \pi$  corresponde a  $t = \pm \pi$  ou meio período ( $T/2$ ) de modo que  $-T/2 \leq t \leq T/2$ ; levando-se a (a.1.4) à (a.1.2) e (a.1.3) obtém-se a forma temporal das fórmulas de Euler:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt \quad (\text{a.1.5})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt$$

logo a série de Fourier pode ser expressa na forma:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right) \quad (\text{a.1.6})$$

sendo que o intervalo de tempo de comprimento  $T$  pode ser substituído por  $0 \leq t \leq T$ .

**7. Erro Médio Quadrático em Séries de Fourier:** considere-se agora que a função  $g(t)$  de período  $T$  possa ser representada por uma série de Fourier; então a soma parcial de ordem  $N$  dada pela eq.(a.1.7) constitui-se uma aproximação de  $f(t)$ :

$$g(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left( a_n \cos \frac{2 n \pi t}{T} + b_n \sin \frac{2 n \pi t}{T} \right) \quad (\text{a.1.7})$$

Por outro lado, tem-se um polinômio:

$$G(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left( \alpha_n \cos \frac{2 n \pi t}{T} + b_n \sin \frac{2 n \pi t}{T} \right) \quad (\text{a.1.8})$$

para o mesmo valor  $N$  fixo, e quer-se saber se este constitui uma boa aproximação para  $f(t)$ . Para isto é necessário definir-se uma grandeza que meça a qualidade do ajustamento entre  $f(t)$  e  $F(t)$  em todo o intervalo. Surge então a definição de erro quadrático total como:

$$E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [g(t) - G(t)]^2 dt \quad (\text{a.1.9})$$

onde evidentemente,  $E \geq 0$ . Os coeficientes de  $a_0$ ,  $a_n$ , e  $b_n$  são escolhidos de modo a obter-se um erro quadrático médio mínimo.

$$\epsilon = g(t) - G(t) \quad (\text{a.1.10})$$

de modo que o erro médio quadrático será:

$$E_N(t) = \overline{\epsilon_n^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \epsilon_n^2(t) dt \quad (\text{a.1.11})$$

onde  $E_N(t)$  é função dos coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$ , e  $b_n$ , mas também é função de  $t$ ; para  $E_N$  ser um mínimo requer-se que:

$$\frac{\partial E_n}{\partial a_n} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E_n}{\partial b_n} = 0 \quad \text{para } n = 1, 2, 3 \dots N \quad (\text{a.1.12})$$

que fornecem  $(2N+1)$  equações, sendo  $(N+1)$  valores de  $a_n$  e  $N$  valores de  $b_n$ . Fazendo-se as derivadas parciais (Cheng, 1959) conclui-se que um polinômio da forma (a.1.8) com um número finito de termos constitui-se na melhor aproximação no sentido do erro médio quadrático mínimo possível para a função periódica.

**8. Função Delta de Dirac :** a função Delta ( $\delta$ ) de Dirac constitui-se uma ferramenta matemática adequada à descrição de efeitos altamente concentrados num ponto. Mais especificamente, ela é também conhecida como "impulso unitário", tal como o exercido por uma raquete de tennis que atua sobre uma bolinha durante um intervalo de contacto muito pequeno.

Representa-se por  $\delta(x-x_0)$  a função Delta localizada sobre o eixo dos  $x$  num pequeno ponto  $x = x_0$ . Esta função tem as seguintes propriedades:

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \neq x_0 \\ \infty & \text{para } x = x_0 \end{cases}$$

A função Delta permite então calcular-se funções localizadas de forma intensamente concentrada num ponto do eixo. Um exemplo típico é aquele em que aparece uma única componente discreta de frequência, situada num ponto do eixo das frequências. Devido à sua localização infinitamente estreita e concentrada, pode-se utilizar sua densidade de frequência espectral (potência por unidade de frequência) como elemento ponderador da potência espectral. Aliás, este aspecto é importante : a função Delta pode ser ponderada por um fator de escala que pode ou não ter dimensões físicas.

## APÊNDICE 2: ALGOORÍTMO DE BASE 2 (RADIX 2)

### 1. Introdução:

Este apêndice tem por objetivo um aprofundamento no estudo do algoritmo FFT em que o número  $N$  de pontos amostrais correspondentes a  $g(t_k)$  definido no CapII pode ser expresso pela relação  $N = 2^\gamma$ , onde  $\gamma$  é um número inteiro e denominado Radix 2. Seja  $W$  seja um número complexo dado pela eq.(147):

$$W \equiv e^{-i \frac{2\pi}{N}}$$

Recordando-se ainda a eq.(144),

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k) e^{-i (2\pi n k)/N}$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$ , obteve-se a eq.(148):

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} g(t_k) W^{nk}$$

### 2. Exemplo para $N = 4$

Para exemplificar os procedimentos a serem realizados, tome-se o exemplo para  $N = 4$ .

$$\begin{aligned}
G_0 &= g(t_0) W^{0.0} + g(t_1) W^{0.1} + g(t_2) W^{0.2} + g(t_3) W^{0.3} \\
G_1 &= g(t_0) W^{1.0} + g(t_1) W^{1.1} + g(t_2) W^{1.2} + g(t_3) W^{1.3} \\
G_2 &= g(t_0) W^{2.0} + g(t_1) W^{2.1} + g(t_2) W^{2.2} + g(t_3) W^{2.3} \\
G_3 &= g(t_0) W^{3.0} + g(t_1) W^{3.1} + g(t_2) W^{3.2} + g(t_3) W^{3.3}
\end{aligned}$$

ou em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(t_0) \\ g(t_1) \\ g(t_2) \\ g(t_3) \end{bmatrix} \quad (\text{a.2.1})$$

ou em forma mais compacta:

$$[G_n] = [W^{nk}] [g(t_k)] \quad (\text{a.2.2})$$

sempre com  $n = 0, 1, 2, 3$  e  $k = 0, 1, 2, 3$ .

Para ilustrar-se o algoritmo de base 2, escolhe-se o número de pontos amostrais  $g(t_k)$  de acordo com a relação:

$$N = 2^\gamma \quad (\text{a.2.3})$$

ou seja,  $N = 4 = 2^2$ , de modo que  $\gamma = 2$ , neste exemplo.

A matriz mostrada na eq.(a.2.1) pode ser reescrita usando-se a relação (Brigham, 1974):



$$W^{nk} = W^{nk \bmod(N)} \quad (\text{a.2.4})$$

onde deve-se lembrar que  $[nk \bmod(N)]$  é o resto da divisão de  $nk$  por  $N$ . Por exemplo,  $W^6=W^{2.3}=W^2$  ;  $W^4=W^{2.2}=W^0$  ;  $W^9=W^{3.3}=W^1$ , de modo que a eq.(a.2.1) torna-se:

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(t_0) \\ g(t_1) \\ g(t_2) \\ g(t_3) \end{bmatrix} \quad (\text{a.2.5})$$

O próximo passo a ser dado é fatorar-se a matriz quadrada dada pela eq.(a.2.5). Assim,

$$\begin{bmatrix} G_0 \\ G_2 \\ G_1 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(t_0) \\ g(t_1) \\ g(t_2) \\ g(t_3) \end{bmatrix} \quad (\text{a.2.6})$$

onde, as duas matrizes quadradas se multiplicadas permitem o retorno à eq.(a.2.1), com exceção das linhas 1 e 2 que foram trocadas além de ter-se utilizado  $W^6=W^2$  e  $W^9=W^1$ , sempre de acordo com a eq.(a.2.4). Denominando-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(t_0) \\ g(t_1) \\ g(t_2) \\ g(t_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(0) \\ g_1(1) \\ g_1(2) \\ g_1(3) \end{bmatrix} = [g_1(t_k)] \quad (\text{a.2.7})$$

e,

$$[\overline{G}_n] = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_2 \\ G_1 \\ G_3 \end{bmatrix} \quad (\text{a.2.8})$$

tem-se o instrumento necessário para os passos seguintes. Na verdade, esta fatoração é a chave da eficiência do algoritmo, como se verá a seguir. Assim:

$$[\overline{G}_n] = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} [g_1(t_k)] \quad (\text{a.2.9})$$

Retornando-se aos elementos da matriz dada na eq.(a.2.7), obtém-se:

$$\begin{aligned}
g_1(0) &= g(t_0) + W^0 g(t_2) \\
g_1(1) &= g(t_1) + W^0 g(t_3) \\
g_1(2) &= g(t_0) + W^2 g(t_2) \\
g_1(3) &= g(t_1) + W^2 g(t_3)
\end{aligned}
\tag{a.2.10}$$

O elemento  $g_1(0)$  é calculado por uma multiplicação complexa e uma adição complexa, uma vez que  $W^0$  não foi reduzido à unidade em favor da generalização de procedimentos. De igual modo,  $g_1(1)$  necessita de uma multiplicação e uma adição complexas. Entretanto, como  $W^0 = -W^2$ , no cálculo de  $g_1(2)$ , é necessária apenas uma adição complexa uma vez que  $W_0 g(t_2)$  já foi calculado em  $g_1(0)$ . De igual maneira, no cálculo de  $g_1(3)$  utiliza-se o resultado anterior  $W^0 g(t_3)$  do cálculo de  $g_1(1)$ . Assim no total, requer-se duas multiplicações complexas e quatro adições complexas para calcular-se  $[g(t_k)]$ . Para completar-se o cálculo da eq.(a.2.9), tem-se:

$$\begin{aligned}
G_0 &= g_1(0) + W^0 g_1(1) \\
G_2 &= g_1(0) + W^2 g_1(1) \\
G_1 &= g_1(2) + W^1 g_1(3) \\
G_3 &= g_1(2) + W^3 g_1(3)
\end{aligned}
\tag{a.2.11}$$

O termo  $G_0$  é calculado por uma multiplicação complexa e uma adição e o termo  $G_2$  é calculado por uma adição porque  $W^0 = -W^2$ . O elemento  $G_1$  é calculado por uma adição e uma multiplicação complexas, enquanto o termo  $G_3$  é calculado apenas por uma adição complexa uma vez que  $W^3 = -W^1$  e  $W^1 g_1(3)$  já foi calculado em  $G_1$ . Assim, o cálculo total da eq.(158) requer quatro multiplicações complexas e oito

adições complexas, enquanto o cálculo simples de  $[G_n]$  iria requerer dezesseis multiplicações e doze adições complexas. Note-se, que a introdução de zeros na matriz fatorada reduz também o número de multiplicações necessárias. Neste exemplo aqui explorado, a fatoração reduz este número de um fator de 2. Mais adiante mostra-se ainda melhor o porque da afirmação anterior de ser esta fatoração a chave da eficiência do algoritmo.

Com base ainda no exemplo com  $N = 4$ , é possível notar-se que o número de multiplicações complexas se reduziu a:

$$\frac{N \gamma}{2} = 4 \quad (\text{a.2.12})$$

e,

$$N \gamma = 8 \quad (\text{a.2.13})$$

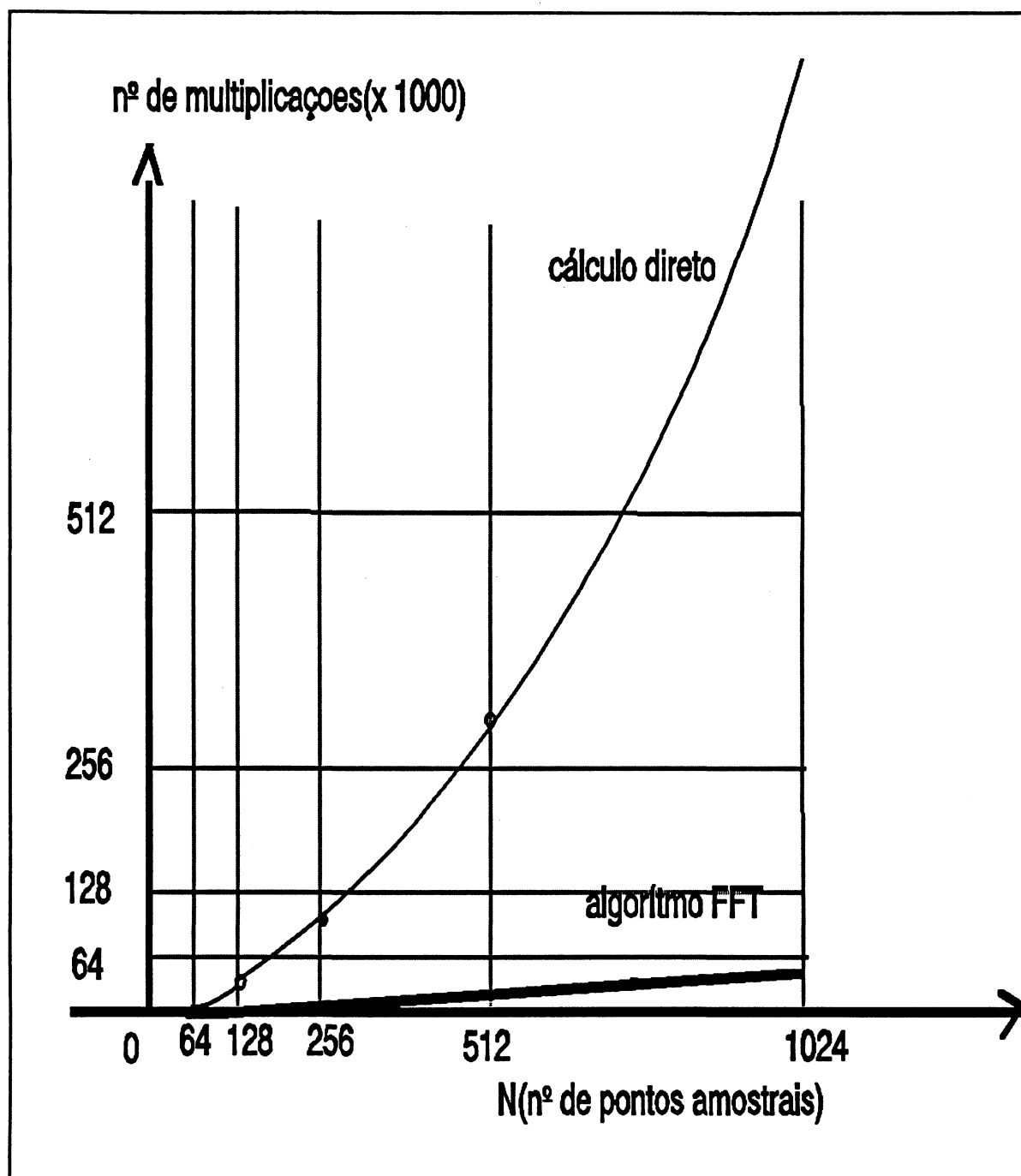
é o número de adições complexas. Se, realizadas diretamente seriam necessárias  $N^2 = 16$  multiplicações complexas. Como o tempo computacional é diretamente proporcional a este número de multiplicações, então a razão de redução computacional proporcionada pelo algoritmo será:

$$\frac{\frac{N^2}{N \gamma}}{2} = \frac{2 N}{\gamma} \quad (\text{a.2.14})$$

que, por exemplo, para  $N = 1024 = 2^{10}$  representaria uma redução de mais de 200 vezes. A fig.(A.2.1) mostra uma comparação com o

procedimento direto, que mostra a eficiência do algoritmo.

FIGURA A.2.1 - COMPARAÇÃO ENTRE O N° DE MULTIPLICAÇÕES PELO MÉTODO DIRETO E PELO ALGORÍTMO FFT



Não deve-se esquecer que ao fatorar-se está sendo introduzida uma discrepância, pelo fato de calcular-se  $\overline{[G_n]}$  ao invés de  $[G_n]$ . Este procedimento, entretanto, não causa problemas maiores porque na generalização da teoria utiliza-se uma técnica de rearranjo de  $[G_n]$  para obter-se  $[G_n]$ . Para isto, reescreve-se  $[G_n]$  trocando-se o argumento ( índice ) n pelo seu binário equivalente. Assim,

$$[\overline{G_n}] = \begin{bmatrix} G_0 \\ G_2 \\ G_1 \\ G_3 \end{bmatrix} \text{ torna-se } \begin{bmatrix} G_{00} \\ G_{10} \\ G_{01} \\ G_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{a.3.15})$$

que tem seu índice convertido em bits invertido, com (01) tornando-se (10) e:

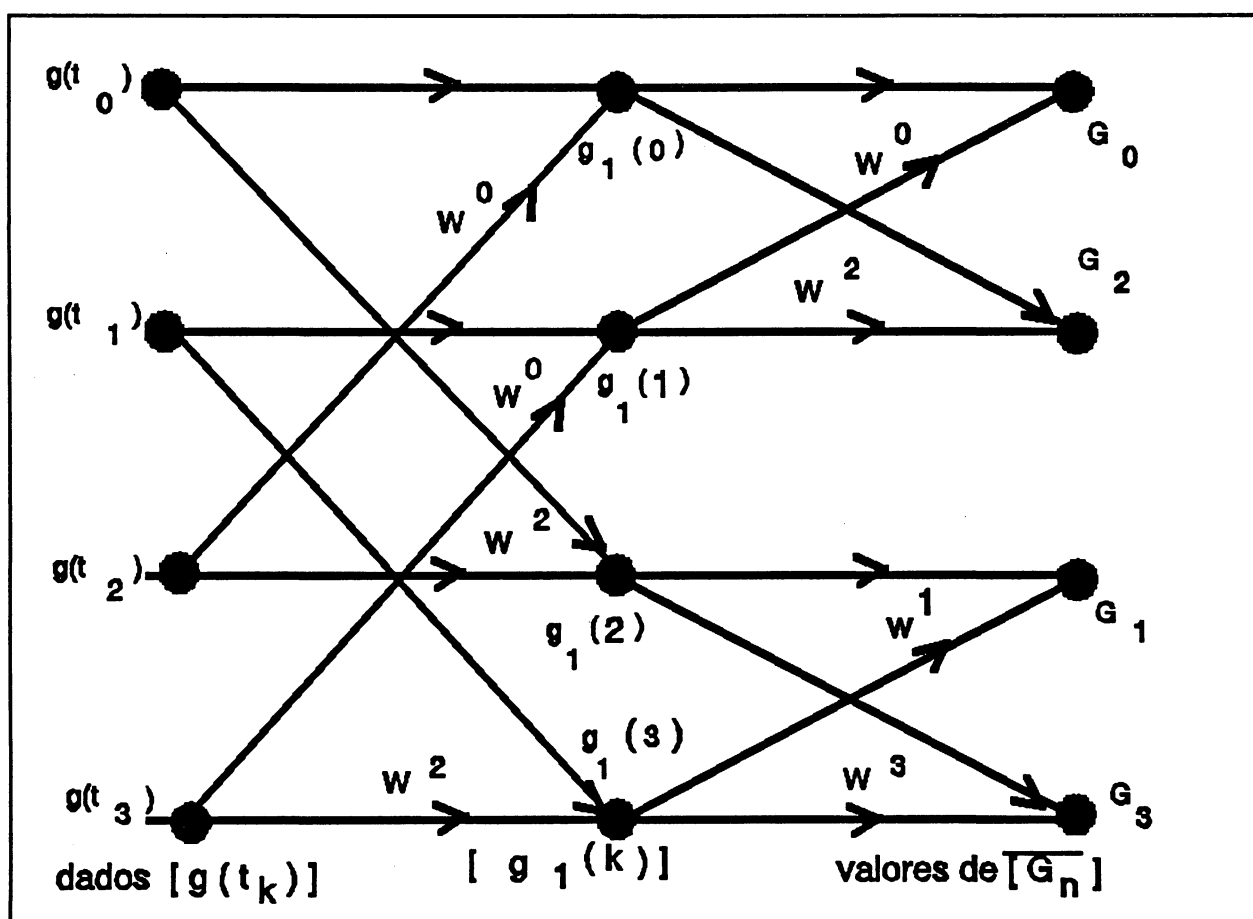
$$G_n = \begin{bmatrix} G_{00} \\ G_{01} \\ G_{10} \\ G_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{a.2.16})$$

Assim procedendo, pode-se generalizar a teoria básica do algoritmo para valores maiores que o deste exemplo. Para isto, é interessante utilizar-se um diagrama de fluxo de sinais, que auxilia a programação de computadores.

### 3. Diagrama de Fluxo de Sinais

A eq.(a.2.6) pode ser convertida em um gráfico ou diagrama de fluxo de sinais, conforme a fig.(A.2.2). Nesta, representa-se o conjunto dos dados por pelo vetor  $[g(t_k)]$  através de uma coluna de nós à esquerda. O segundo conjunto de nós, colocado ao meio da figura, representa o vetor  $[g_1(t_k)]$ . O terceiro arranjo vertical de nós corresponde ao vetor  $[G_n]$ . Assim, para o exemplo com  $N = 4$  têm-se:

FIGURA A.2.2 - DIAGRAMA DE FLUXO DE SINAIS PARA  $N = 4$

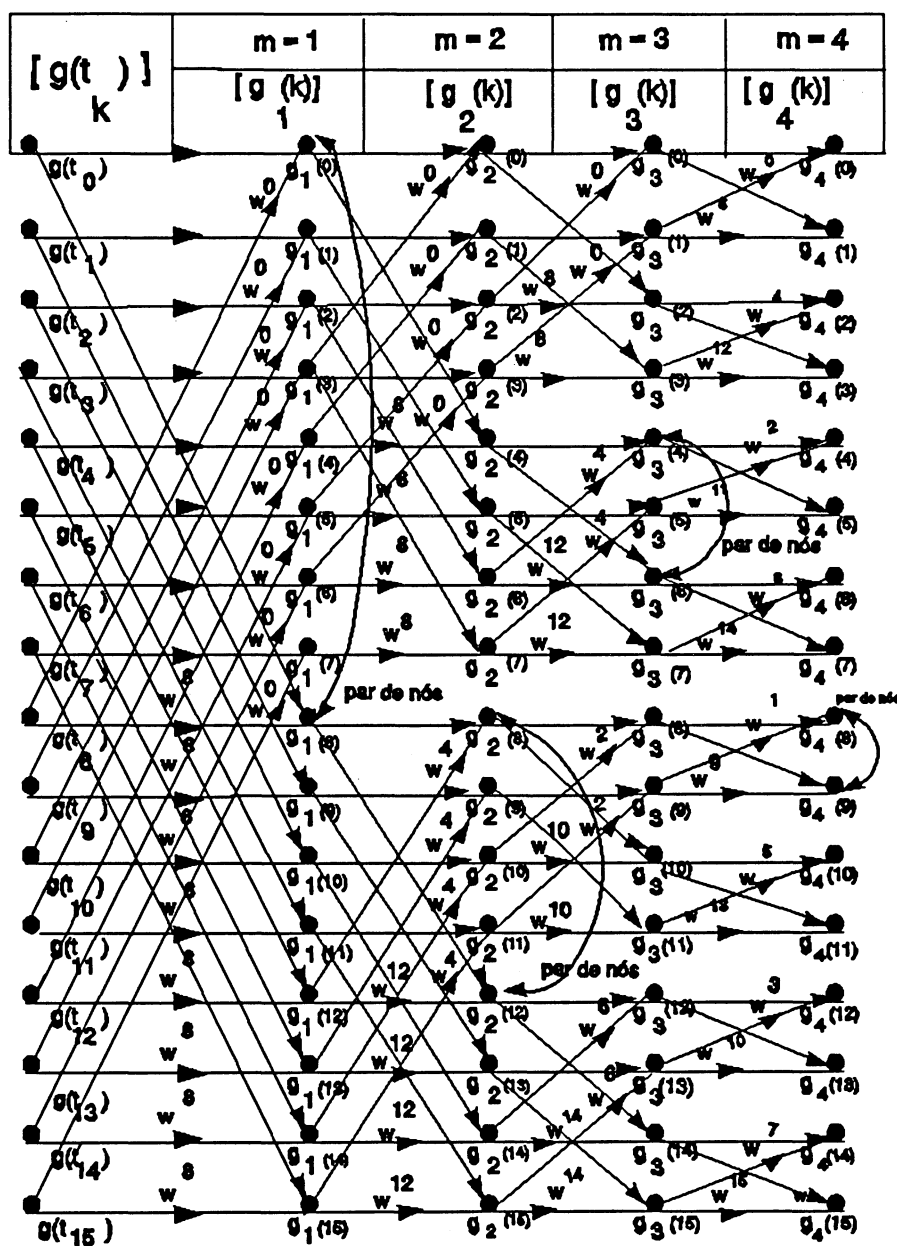


Para valores de  $N$  maiores, como por exemplo,  $N = 16$ , é possível verificar-se propriedades importantes para a performance computacional do algoritmo. Neste exemplo,  $N = 16 = 2^4$ ,  $\gamma = 4$ , o que significa que haverá quatro arranjos verticais de nós além dos dados. O diagrama de fluxo é mais complexo, conforme pode-se verificar na fig.(A.2.3), mas pode-se introduzir o conceito de par de nós ou "dual node pair", que são nós em que as entradas são as mesmas, ou seja, com dois caminhos de transmissão entrantes iguais.

Alguns pares como  $g_1(0)$  e  $g_1(8)$ ,  $g_2(8)$  e  $g_2(12)$ ,  $g_3(4)$  e  $g_3(6)$ ,  $g_4(8)$  e  $g_4(9)$  são exemplos de pares de nós. Tome-se o par  $g_1(0)$  e  $g_1(8)$ . Eles são ambos calculados em termos de  $g(0)$  e  $g(8)$ , e por outro lado não são utilizados em nenhum outro cálculo posterior. Por isto, é possível retornar-se e armazenar  $g_1(0)$  e  $g_1(8)$  sobre os primeiros, resultando em economia em memória computacional. Denominando-se genericamente de  $[g_m(k)]$  o vetor coluna com os arranjos verticais de nós, então o espaçamento entre os nós em uma coluna vertical será (Brigham,1974) dado por  $N/2^m$ . Portanto, para um nó genérico  $g_m(k)$ , o seu par será sempre  $g_m(k+N/2_m)$ . Por outro lado, o cálculo computacional de um par de nós requer apenas uma multiplicação complexa. Isto se deve ao fato que  $W^p = -W^{p+N/2}$  (Brigham,1974). Tomando-se outro exemplo,  $g_2(8)$  e  $g_2(12)$  são obtidos respectivamente pela multiplicação de  $W^4 g_1(12)$  e  $W^{12} g_1(12)$ , sendo  $W^4 = -W^{12}$ . Ou seja, é a mesma multiplicação que está sendo feita.



FIGURA A.2.3 - DIAGRAMA DE FLUXO(N=16)- EXEMPLO DE PARES DE NÓS



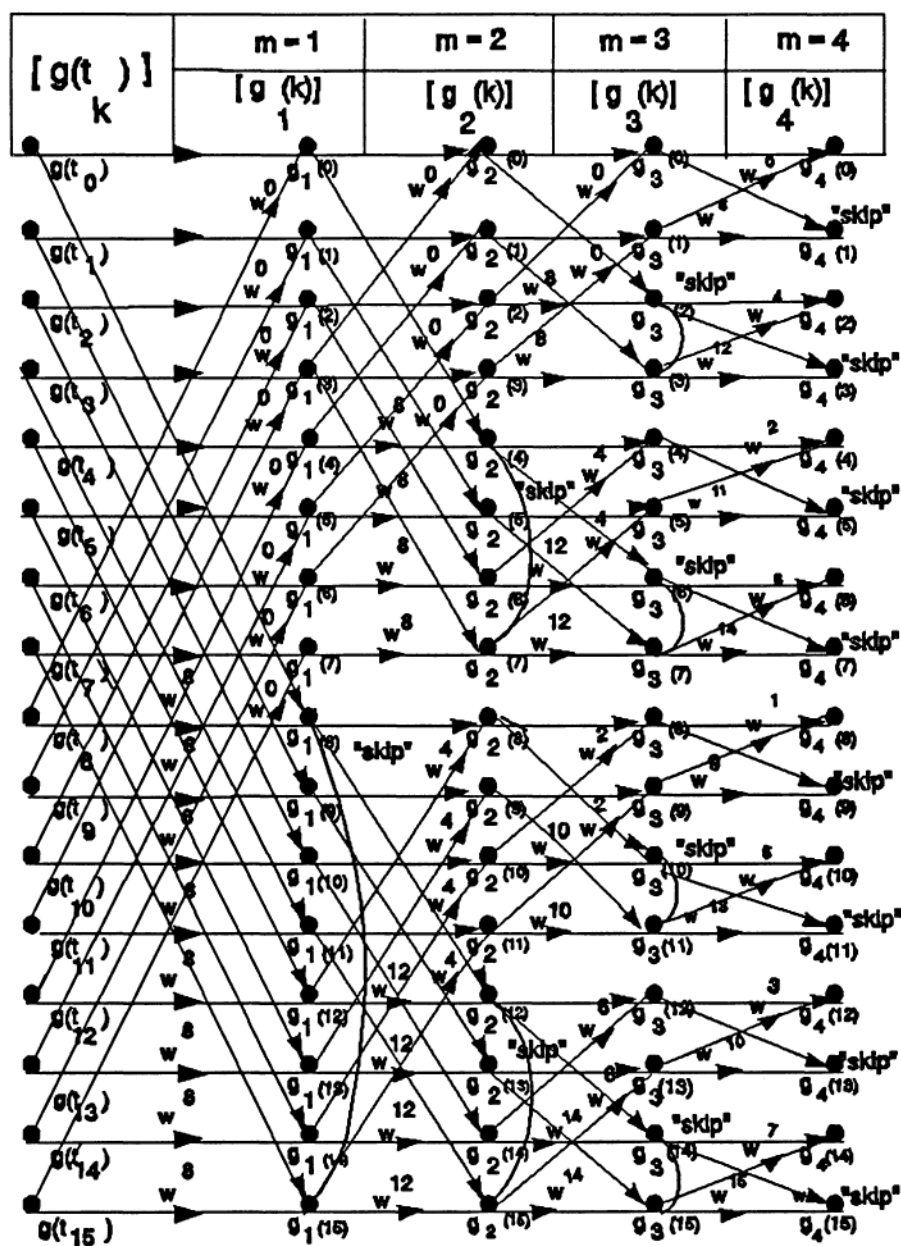
Assim, em resumo, o cálculo computacional de qualquer par de nós é dado pelas equações:

$$g_m(k) = g_{m-1}(k) + W^P g_{m-1}(k + N/2^m) \quad (a.2.16)$$

$$g_m(k + N/2^m) = g_{m-1}(k) - W^P g_{m-1}(k + N/2^m) \quad (a.2.17)$$

e é feito apenas uma vez.

No cálculo computacional, inicia-se com  $k = 0$  e trabalha-se seqüencialmente pelo arranjo vertical calculando-se os elementos dados pelas eq.(a.2.16) e (a.2.17). Uma vez que os pares de nós estão situados a distâncias de  $N/2^m$  entre si, então deve-se pular ("skip") os nós cujos valores já tenham sido calculados. Para ilustrar este fato, observe-se a fig.(A.3.4). Começando-se com  $k = 0$ , para  $m = 1$  os pares de nós estarão localizados a cada  $k = N/2^1 = 8$ . Assim, após calcular-se os primeiros oito termos da coluna  $g_1(k)$  deve-se pular os próximos oito porque já foram calculados. A fig.(A.2.4) ilustra este procedimento de "skip" para os outros valores de  $m$  no mesmo exemplo. Em geral, trabalha-se na  $m$ -ésima coluna da seguinte forma: calcula-se os primeiros  $N/2^m$  nós, pula-se os próximos  $N/2^m$ , e assim sucessivamente. O programa computacional deve ter a informação que deve parar de pular ("skipping") os cálculos de nós, quando alcança-se um nó com índice maior que  $(N-1)$ .

FIGURA A.2.4 - EXEMPLO PARA  $N = 8$  DO "SKIP" COMPUTACIONAL

#### 4. Determinação de $W^p$

Até este ponto, todas as propriedades das colunas do diagrama de fluxo de sinais foram discutidas, exceto como determinar-se o valor  $p$  no expoente do número complexo  $W$ . Este pode ser obtido do seguinte modo (Brigham, 1974):

- a) escreve-se o índice  $k$  em forma binária com  $\gamma$  bits.
- b) desloca-se este número binário (  $\gamma - m$  ) bits para a direita, preenchendo as posições em aberto deixadas à esquerda com zeros.
- c) inverte-se a ordem dos bits; este bit invertido é o termo  $p$ .

Tome-se como exemplo o nó  $g_3(8)$  na fig.(A.3.4). Como  $\gamma = 4$ ,  $k = 8$  e  $m = 3$ , então  $k$  em números binários será (1000). Deslocando-se (  $\gamma - m$  ) =  $4 - 3 = 1$  posição à direita, e enchendo de zeros à esquerda, resulta (0100). Inverte-se agora a ordem dos bits para produzir (0010) ou seja, o número inteiro 2. Portanto, o valor de  $p = 2$ .

O mecanismo da inversão destes bits pode suscitar dúvidas. Por isto, considere-se um número binário ( $a_4 a_3 a_2 a_1$ ). Este número pode ser escrito na base 10 como:

$$a_4 \times 2^3 + a_3 \times 2^2 + a_2 \times 2^1 + a_1 \times 2^0 \quad (a.2.18)$$

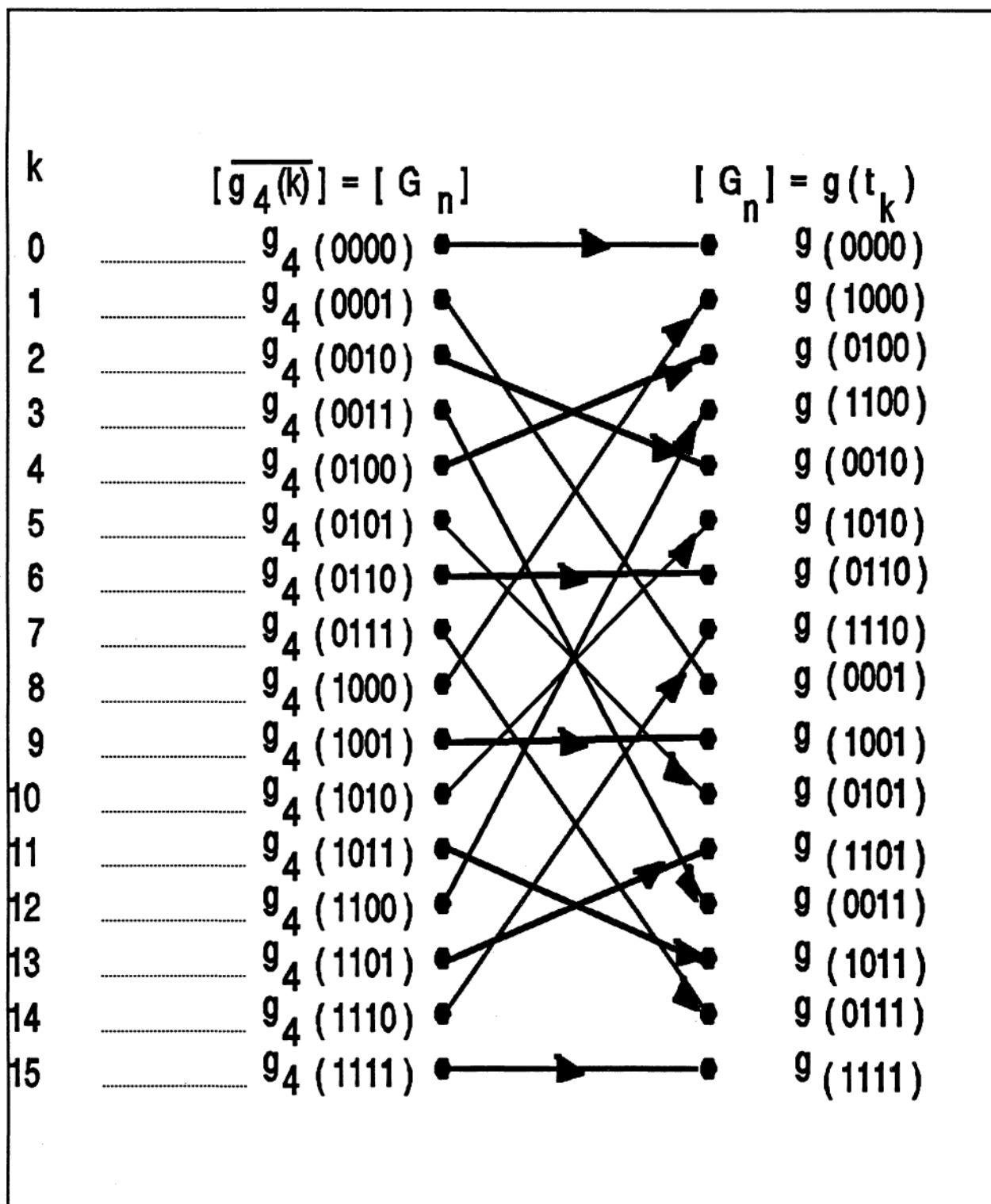
O número com os bits invertidos necessário para o algoritmo será então:

$$a_1 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_3 \times 2^1 + a_4 \times 2^0 \quad (\text{a.2.19})$$

ou seja, possuindo-se uma técnica para determinar o número binário  $(a_4a_3a_2a_1)$ , então a operação de inversão de bits é extremamente simples.

## 5. REARRANJANDO ("UNSCRAMBLING") a FFT

O passo final a ser dado é rearranjar ("unscramble") os resultados, como na eq.(a.3.16). Ou seja, tendo-se obtido o vetor   
 ----  
  $[G_n]$  em termos de um número binário, como descrito anteriormente, deve-se inverter ("flip") estes números binários para obter-se  $[G_n]$ . A fig.(A.3.5) mostra estes resultados da operação de inversão de bits. Termos como  $g_4(k)$  e  $g(i)$  foram simplesmente intercambiados porque  $i$  é um número inteiro obtido da inversão de bits do inteiro  $k$ .

FIGURA A.3.5 - EXEMPLO DA INVERSÃO DE BITS PARA  $N = 16$ 

Note-se que ocorrem situações iguais à dos pares de nós, pois quando percorre-se o arranjo vertical de nós trocando-se os  $g_m(k)$  por  $g(i)$  pode-se encontrar nós que já tenham sido anteriormente trocados. Por exemplo, enquanto o nó  $k = 0$  permanece em sua localização, os nós  $k = 1, 2$  e  $3$  são trocados com os nós  $8, 4$  e  $12$  respectivamente. O próximo nó, de número  $4$ , já foi trocado com o nó  $2$ , anteriormente. Assim para eliminar-se a possibilidade de calcular-se um nó que já foi trocado previamente, deve-se verificar se o número  $i$  inteiro obtido pela inversão de  $k$  é menor que  $k$ . Se o for, significa que este já foi trocado em operação prévia. Com estes cuidados, assegura-se assim a economia computacional nos procedimentos de rearranjo.

### APÊNDICE 3 : CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DO GIROTEOLITO WILD GAK-1

O giroscópio WILD GAK-1 "Sistema Rellensmann" tem as seguintes características de acordo com o manual de instruções (WILD, ca[,1970]) :

Altura	340 mm
Diâmetro	85 mm
Cinta de suspensão "Nivaflex"	
em secção	0,4/0,02 mm
tração da cinta	em torno de 550 gf
Motor do giroscópio	Perkin-Elmer tipo 831
velocidade de rotação	ca. 22000 rpm
momento angular	$1,86 \times 10^6 \text{ cm}^2 \text{ g/s}$
tempo de aceleração	ca. 1,5 min
tempo de frenagem	50 s
duração de serviço	pelo menos 1000 h
Meio período de oscilação em lat. medianas	ca. 4 min
Campo de emprego nos dois hemisférios	até $\phi = 75^\circ$
Temperatura de emprego	$-40^\circ\text{C}$ a $+ 50^\circ\text{C}$
Erro médio azimutal	$\pm 20''$
Intervalo da escala auxiliar	10'



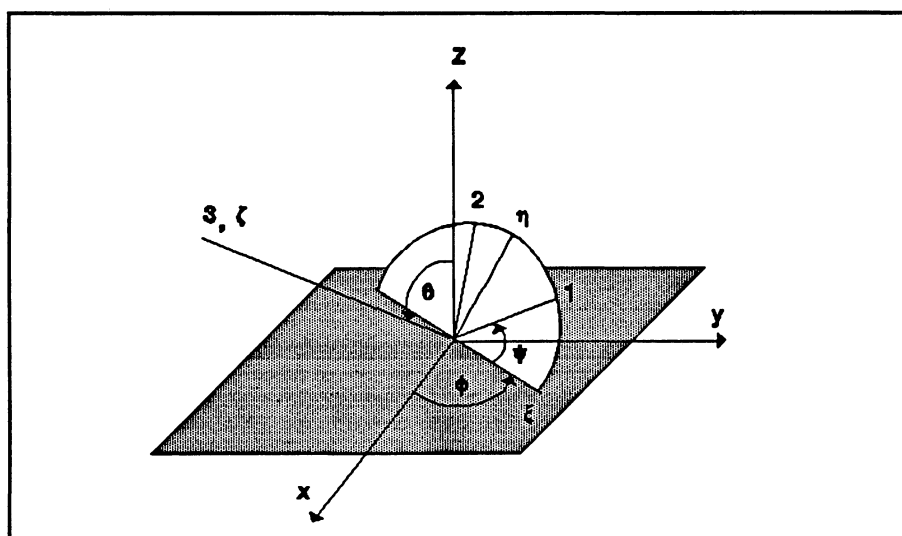
#### APÊNDICE 4 : ÂNGULOS DE EULER

Para descrever-se a orientação espacial de um corpo rígido é necessária a introdução de um conjunto de coordenadas e dos ângulos de Euler.

Escolhendo-se um conjunto de eixos fixo no corpo (Symon, 1973), que são tomados como eixos principais de inércia e com origem no centro de massa do corpo e denotando-os como eixos 1, 2 e 3, pode-se relacioná-los através de transformações de coordenadas com tres eixos de referência fixos no espaço, denominados de eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , em função da sua relação espacial.

Para descrever a posição espacial dos eixos 1, 2 e 3 atrelados ao corpo rígido, relativa aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  utiliza-se então os ângulos de Euler,  $\theta$ ,  $\phi$  e  $\psi$  mostrados na fig.(A.4.1).

FIGURA A.4.1 - ângulos de Euler



O ângulo  $\theta$  é o ângulo formado entre o eixo 3 e o eixo z. Se o corpo apresentar alguma simetria este pode ser tomado como eixo de simetria. A interseção entre o plano 1-2 com o plano xy é denominada linha dos nodos,  $\xi$  e o ângulo  $\phi$  é medido no plano xy, do eixo x até a linha dos nodos. O ângulo  $\psi$  é medido no plano 1-2 a partir da linha dos nodos até o eixo 1. Nesta construção assumiu-se que ambos os sistemas de eixos são dextrógiros. Às vezes encontra-se, dependendo dos autores outras definições para os ângulos de Euler, mas a idéia da descrição espacial é sempre a mesma. É também interessante introduzir-se um terceiro conjunto de eixos,  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$ , onde o  $\xi$  é a linha dos nodos,  $\zeta$  coincide com o eixo 3 do corpo e  $\eta$  está no plano 1-2.

Assim, ao tratar-se das velocidades angulares utilizando-se os ângulos de Euler, pode-se enunciar (Symon, 1973) um importante teorema envolvendo a adição de velocidades angulares, a saber:

" Dado um sistema de coordenadas que gira com velocidade angular  $\omega_1$  com respeito a um sistema de referência inercial, e um segundo sistema que gira com velocidade angular  $\omega_2$  com relação ao primeiro. Então a velocidade angular deste último em relação ao sistema de referência será  $\omega_1 + \omega_2$  ."

**APÊNDICE 5 : EXEMPLO DE UM ARQUIVO DE DADOS TEMPORAIS OBTIDOS COM UTILIZANDO-SE COMO CRONÓGRAFO O RELÓGIO INTERNO DE UM MICROCOMPUTADOR**

Os dados coletados em várias séries de medidas, obtidas neste trabalho, reúnem as amplitudes do movimento de oscilação do eixo de rotação do giroscópio (1ª coluna), em unidades da escala auxiliar, e os correspondentes instantes temporais de passagem por estes pontos(2ª coluna). Os arquivos de dados adquirem então a forma abaixo mostrada em amostra. Para o processamento, o primeiro instante temporal foi zerado e aos outros subtraiu-se este valor.

11	98.420
10	115.120
9	125.830
8	134.780
7	142.520
6	149.770
5	156.800
4	163.230
3	169.270
2	175.810
1	182.070
0	188.000
-1	194.370
-2	201.240
-3	207.880
-4	215.190
-5	223.590
-6	233.260
-7	245.560
-7	296.530
-6	308.730
-5	318.450
-4	326.470
-3	334.100
-2	340.580
-1	347.390
0	353.770

E assim sucessivamente, obtem-se os dados temporais referentes às amplitudes no domínio do tempo.

## APÊNDICE 6 : PROGRAMAS UTILIZADOS

### 1. PROGRAMA FORTRAN PARA REGISTRAR OS INSTANTES CRONOMÉTRICOS DAS PASSAGENS DA MARCA DE REFERÊNCIA POR PONTOS DA ESCALA AUXILIAR

O programa CHORA.FOR em linguagem FORTRAN permite a armazenagem de dados temporais dos instantes das passagens da marca de leitura através de pontos da escala auxiliar. Estes pontos representam o movimento do eixo de rotação do giroscópio em torno da direção do Norte giroscópico. A listagem apresentada abaixo utiliza dois comandos que só existem na versão FORTRAN 5.0 e que permitem o acesso ao relógio interno do computador, que é então utilizado como cronógrafo.

```
c      PROGRAMA CHORA.FOR
c      Copyright © silvia (1994)
c      Este programa permite marcar os instantes cronometricos
c      das passagens da marca auxiliar do giroteodolito
c      por pontos da escala auxiliar.
c      Este programa so funciona se o primeiro valor da escala
c      for positivo e o deslocamento for da esquerda para a
c      direita.
      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
      CHARACTER*12 CDATE,CTIME
      OPEN(UNIT=20,FILE='PASSA.DAT',STATUS='UNKNOWN')
c      este arquivo da o valor da escala e a hora,minuto, segundo
c      e fracao correspondente .
      OPEN(UNIT=21,FILE='SEC.DAT',STATUS='UNKNOWN')
c      Este arquivo da a escala e o numero de segundos
      acumulados.
      DATA CDATE/'A DATA E: '//
      DATA CTIME/'A HORA E: '//
      CALL GETDAT(IYR,IMON,IDAY)
      WRITE(*,10)CDATE,IDAY,IMON,IYR
      WRITE(20,10)CDATE,IDAY,IMON,IYR
10     FORMAT(' ',1X,A,I2,'/',I2,'/',I4,/)
      AC=0.D0
      WRITE(*,*)'ENTRE COM A PRESSAO ATMOSFERICA - mm-Hg'
      READ(*,*)P
      WRITE(20,65)P
65     FORMAT(' PRESSAO ATMOSFERICA  = ',F8.2)
```

```

WRITE(*,*)'ENTRE COM A TEMPERATURA EM GRAUS CELSIUS'
READ(*,*)T
WRITE(20,66)T
66  FORMAT(' TEMPERATURA (graus Celsius) =',F6.2)
WRITE(*,*)'DIGITE 1 PARA COMECAR E 999 PARA TERMINAR'
write(20,*)' '
WRITE(20,*)'(LEITURA DA ESCALA / HORA / MINUTO /
SEGUNDO+FRACAO)'
READ(*,*)TESTE
IF(TESTE.EQ.999)GO TO 100
WRITE(*,*)'QUAL O PRIMEIRO VALOR DA ESCALA'
READ(*,*)LST
C  LST=LST+1
WRITE(*,*)'DIGITE 1 PARA CADA PASSAGEM DA ESQ. PARA A
DIR.'
WRITE(*,*)'DIGITE 9 PARA CADA PASSAGEM DA DIR. PARA A
ESQ.'
CALL GETTIM(IHR,IMIN,ISEC,I100TH)
SEG=FLOAT(ISEC)+CENT
t0=float(ihr)+float(imin)/60.+seg/3600.
50  READ(*,*)LL
AC=AC+1
IF(LL.EQ.999)GO TO 100
IF(LL.EQ.9)GO TO 90
IF(K.EQ.0)LST=LST+1
K=1
LST=LST-1
c  Esta funcao so existe na versao FORTRAN 5.1
CALL GETTIM(IHR,IMIN,ISEC,I100TH)
WRITE(*,21)CTIME,IHR,IMIN,ISEC,I100TH
CENT=FLOAT(I100TH)/100.
SEG=FLOAT(ISEC)+CENT
ta=((float(ihr)+float(imin)/60.+seg/3600.)-t0)*3600
WRITE(20,150)LST,ihr,imin,SEG
WRITE(21,67)LST,ta
WRITE(*,*)'VALOR DA ESCALA',LST
GO TO 50
90  IF(K.EQ.1)LST=LST-1
LST=LST+1
K=0
CALL GETTIM(IHR,IMIN,ISEC,I100TH)
WRITE(*,21)CTIME,IHR,IMIN,ISEC,I100TH
20  FORMAT(' ',1X,I2,I2,'h',I2,'min',I2,',',I2,'s')
21  FORMAT(' ',1X,A,I2,'h',I2,'min',I2,',',I2,'s')
CENT=FLOAT(I100TH)/100.
SEG=FLOAT(ISEC)+CENT
ta=((float(ihr)+float(imin)/60.+seg/3600.)-t0)*3600
WRITE(20,150)LST,ihr,imin,SEG
WRITE(21,67)LST,ta
67  FORMAT(I3,2X,F9.3)
WRITE(*,*)'VALOR DA ESCALA ',LST
GO TO 50

```

```

150    FORMAT(I3,1X,I2,1X,I2,1X,F5.2)
100    STOP
      END

```

## 2. PROGRAMA FORTRAN VAIM.FOR PARA O AJUSTAMENTO DOS DADOS OBTIDOS ATRAVÉS DO PROGRAMA CHORA.FOR PELO MÉTODO PARAMÉTRICO

O programa VAIM.FOR em linguagem FORTRAN permite o ajustamento pelo método paramétrico dos dados obtidos através do programa CHORA.FOR. Este programa, como o anterior, deve ter sua versão executável implantada no microcomputador portátil levado ao campo quando em campanha para determinação de azimutes de direções. O limite sugerido para verificação de convergência após cada iteração é testado ao final do programa. Os argumentos de entrada são: o número de dados do arquivo gerado pelo VAIM.FOR (que corresponde ao número de linhas da matriz A); o número de graus de liberdade (igual ao número de dados menos o número de parâmetros); o nome do arquivo de dados, o nome do arquivo com os parâmetros ajustados  $X_0$ , e o nome do arquivo de saída.

\$debug

```

C      CALCULO DO AJUSTAMENTO PARAMETRICO
      DIMENSION A1(500,5),VL(500),AT(5,500),AN(5,5),U(5)
      DIMENSION X1(5),B(5),A1X(500),VT(500),ZL(500),XMVC(5,5)
      DIMENSION A(500,5),Xo(5),V(500),Xa(5),ZLa(500),X(5)
      CHARACTER*30 ARQ1,ARQ2,ARQS,ARQS1
      WRITE(*,7502)
7502   FORMAT(60(/))
      WRITE(*,7501)

```

```

7501  FORMAT(23X,' F', '=====','7',
      #/,23X,'||', ' A J U S T A M E N T O   D E', '||',
      #/,23X,'||', ' S E R I E S   T E M P O R A I S', '||',
      #/,23X,'||', ' G I R O T E O D O L I T O', '||',
      #/,23X,'||', ' U N I V E R S I D A D E   F E D E R A L   D O   P A R A N A', '||',
      #/,23X,'||', ' C . P . G . E M   C I E N C I A S   G E O D E S I C A S', '||',
      #/,23X,'||', ' ( C ) :   M s C .   P E D R O   L U I S   F A G G I O N', '||',
      #/,23X,'||', '=====','7',
WRITE(*,5)
5      FORMAT(20X,' INFORME AO PROGRAMA OS SEGUINTE DADOS:')
WRITE(*,110)
110    FORMAT(/2X,' NUMERO LINHAS DA MATRIZ A.....: '$)
      READ(*,*)M
      WRITE(*,14)
14     FORMAT(/2X,' GRAUS DE LIBERDADE .....: '$)
      READ(*,*)GL
      WRITE(*,8)
8      FORMAT(/2X,' ENTRE COM O ARQUIVO DE DADOS.....: '$)
      READ(*,9) ARQ1
9      FORMAT(A30)
      WRITE(*,27)
27     FORMAT(/2X,' ENTRE COM O ARQUIVO (MI,a,b,w).....: '$)
      READ(*,28) ARQ2
28     FORMAT(A30)
      WRITE(*,20)
20     FORMAT(/2X,' ARQUIVO DOS RESULTADOS .....: '$)
      READ(*,26) ARQS
26     FORMAT(A30)
      WRITE(*,29)
29     FORMAT(/2X,' VETOR DO RESIDUOS .....: '$)
      READ(*,25) ARQS1
25     FORMAT(A30)
      WRITE(*,60)
60     FORMAT(/,20X,' Em processamento.AGUARDE POR FAVOR..',)
      OPEN(1,FILE=ARQ1,STATUS='OLD')
      OPEN(2,FILE=ARQ2,STATUS='OLD')
      OPEN(4,FILE=ARQS,STATUS='UNKNOWN')
      OPEN(5,FILE=ARQS1,STATUS='UNKNOWN')
      SIGM0=1
      MCONT=0
      N=4
C***** LENDO A MATRIZ Xo
      DO 21 I=1,N

      READ(2,*)Xo(I)
21     CONTINUE
C***** LENDO A MATRIZ A

      DO 10 I=1,M
      READ(1,*)(A(I,J),J=1,2)
10     CONTINUE

```

```

C***** FORMANDO A MATRIZ A

44      CONTINUE
        DO 22 I=1,M
          A1(I,1)=1
          AUX=X0(4)*A(I,2)
          A1(I,2)=COS(AUX)
          A1(I,3)=SIN(AUX)
          A1(I,4)=- (X0(2)*A(I,2)*SIN(AUX)) + X0(3)*A(I,2)*COS(AUX)
22      CONTINUE
C***** CALCULANDO O VETOR Lo
        DO 11 I=1,M
          AUX1=X0(4)*A(I,2)
          ZL(I)=X0(1)+X0(2)*(COS(AUX1))+X0(3)*(SIN(AUX1))
11      CONTINUE
C***** FORMANDO O VETOR L
        DO 13 I=1,M
          VL(I)=ZL(I)-A(I,1)
13      CONTINUE
C***** TRANSPONDO A MATRIZ A1
        CALL TRANSP(A1,AT,M,N)
C***** CALCULANDO N=AT*P*A
        CALL MUL(AT,A1,AN,N,M,N)

C***** INVERTENDO N
        CALL VERSOL(AN,B,N)
C***** CALCULANDO U
        CALL MUL(AT,VL,U,N,M,1)
C***** CALCULANDO X
        CALL MUL(AN,U,X,N,N,1)
        DO 41 I=1,N
          X1(I)=-X(I)
41      CONTINUE
C***** CALCULO DE V
        CALL MUL1(A1,X1,A1X,M,N,1)
        DO 15 I=1,M
          V(I)=A1X(I)+VL(I)
15      CONTINUE
C***** CALCULO DOS PARAMETROS AJUSTADOS
        DO 16 I=1,N
          Xa(I)=X0(I)+X1(I)
16      CONTINUE
C***** CALCULO DE La
        DO 17 I=1,M
          ZLa(I)=V(I)+A(I,1)
17      CONTINUE
C***** CALCULO DE SIGMA A POSTERIORE

```



```

      CALL TRANSP(V,VT,M,1)
      CALL MUL(VT,V,VTV,1,M,1)
      SIGMP=SQRT(VTV/GL)
C***** CALCULO DA "MVC" DOS PARAM. AJUSTADOS
      DO 42 I=1,N
      DO 42 J=1,N
      XMVC(I,J)=SIGM0**2*AN(I,J)
42      CONTINUE
C***** TESTE DA PRECISAO
      AUX3=(ABS(SIGMP**2-SIGM0**2))/(SIGM0**2)
      IF(AUX3.GE.0.0001) THEN
      DO 45 I=1,N
45      Xo(I)=Xa(I)
      MCONT=MCONT+1
      SIGM0=SIGMP
      GO TO 44
      ELSE
      END IF
C***** IMPRESSAO DOS DADOS E RESULTADOS
      CALL IMP(Xa,XMVC,V,A,SIGMP,MCONT,M,N)
C***** FINALIZACAO DO PROGRAMA
      STOP
      END
C*****F      I      M

```

```

C////////////////////////////////////
C////////////////////////////////////SUBROTINAS UTILIZADAS////////////////////////////////////
C////////////////////////////////////

```

```

C***** SUBRROTINA PARA INVERSAO DE MATRIZES

```

```

      SUBROUTINE VERSOL(A,B,I)
      DIMENSION A(5,5),B(5)

      IF(I.EQ.1) GO TO 50

      IM=I-1

      DO 40 K=1,I
      DO 10 J=1,IM

10      B(J)=A(1,J+1)/A(1,1)

      B(I)=1./A(1,1)

      DO 30 L=1,IM

      DO 20 J=1,IM

```

```

20      A(L,J)=A(L+1,J+1)-A(L+1,1)*B(J)
30      A(L,I)=-A(L+1,1)*B(I)
        DO 40 J=1,I
40      A(I,J)=B(J)
        RETURN
50      A(1,1)=1.D0/A(1,1)

        RETURN
        END

```

```

C***** SUBRRROTINA P/ DUPLO PRODUTO MATRICIAL
        SUBROUTINE MUL(A,B,C,I,J,K)
        DIMENSION A(5,500),B(500,5),C(5,5)
        DO 1 N=1,I
        DO 1 L=1,K
        C(N,L)=0.
        DO 1 M=1,J
        C(N,L)=C(N,L)+A(N,M)*B(M,L)
1       CONTINUE
        RETURN
        END

```

```

C***** SUBRRROTINA P/ DUPLO PRODUTO MATRICIAL
        SUBROUTINE MUL1(A,B,C,I,J,K)
        DIMENSION A(500,5),B(5,5),C(500,5)
        DO 1 N=1,I
        DO 1 L=1,K
        C(N,L)=0.
        DO 1 M=1,J
        C(N,L)=C(N,L)+A(N,M)*B(M,L)
1       CONTINUE
        RETURN
        END

```

```

C***** SUBRRROTINA PARA TRANSPOR MATRIZES
        SUBROUTINE TRANSP(A,B,I,J)
        DIMENSION A(500,5),B(5,500)
        DO 2 N1=1,I
        DO 2 M1=1,J
        B(M1,N1)=A(N1,M1)
2       CONTINUE
        RETURN
        END

```

```

C***** SUBRRROTINA DE IMPRESSAO
        SUBROUTINE IMP(XA,B,C,A,SIGMP,MCONT,M,N)
        DIMENSION XA(5),B(5,5),C(500),A(500,5)
        WRITE(4,110)
110      FORMAT(/,36X,'"VETOR Xa"',/)

```

```

DO 11 I=1,N
11  WRITE(4,111)XA(I)
111  FORMAT(32X,f14.8)
    WRITE(4,112)
112  FORMAT(//,25X,'MATRIZ VARIANCIA-COVARIANCIA',/)
    DO 13 I=1,N
13   WRITE(4,114) (B(I,J),J=1,N)
114  FORMAT(9X,4(E16.7))
    DO 14 I=1,M
14   WRITE(5,223)C(I),A(I,2)
223  FORMAT(F12.8,10X,F12.6)
    WRITE(4,121)
121  FORMAT(//,30X,'SIGMA A POSTERIORE')
    WRITE(4,120)SIGMP
120  FORMAT(/,31X,F12.8)
    WRITE(4,224)
224  FORMAT(//,30X,'NUMERO DE ITERACOES')
    WRITE(4,225)MCONT
225  FORMAT(/,38X,I2)
    RETURN
    END

```

### 3. PROGRAMA INTERPOL.FOR QUE FAZ A INTERPOLAÇÃO DOS DADOS GERADOS PELO PROGRAMA CHORA.FOR E A FILTRAGEM DE ALTAS FREQUÊNCIAS

O programa INTERPOL.FOR permite a interpolação dos dados gerados pelo programa CHORA.FOR, de modo a prepará-los para a Análise de Fourier. Esta necessita que estes dados sejam eqüiespaçados no tempo, enquanto no arquivo original estes dados são eqüiespaçados em termos de amplitudes do movimento senoidal.

\$DEBUG

```

C-----
C      PROGRAMA INTERPOL.FOR
C
C      TEM POR FINALIDADE A DETERMINACAO DO VALOR INTERPOLADO DE
C      ESCALA DO GIROTEODOLITO WILD GHK1, PARA VALORES MULTIPLOS
C      DE UM INTERVALO PREDEFINIDO, NESTE MESMO PROGRAMA, EM
C      FUNCAO DO INTERVALO MAXIMO ENTRE DUAS LEITURAS SUCESSIVAS
C      DE TEMPO. A INTERPOLACAO E EFETUADA POR REGRESSAO
C      POLINOMIAL ITERATIVA, TENDO EM VISTA QUE OS INTERVALOS DE
C      TEMPO ENTRE DUAS LEITURAS INTEIRAS DA ESCALA NAO SAO
C      CONSTANTES. OS DADOS DE ENTRADA SAO AS LEITURAS SOBRE
C      VALORES INTEIROS DA ESCALA DE LEITURAS AUXILIAR EM
C      ARQUIVO TIPO SEC.DAT (AMPLITUDES, TEMPO) EM FORMATO
C      LIVRE. O PROGRAMA RA INTERROGAR O NOME DO ARQUIVO DE
C      ENTRADA, O DE SAIDA, IRA FORNECER O MAIOR INTERVALO DE
C      TEMPO ENTRE DUAS LEITURAS E IRA QUESTIONAR QUAL O
C      INTERVALO DESEJAVEL PARA A INTERPOLACAO (DELTA T). ISTO
C      POSTO, O PROGRAMA EFETUA A REGRESSAO POLINOMIAL ITERATIVA
C      DAS AMPLITUDES PARA VALORES MULTIPLOS DE DELTA T, A
C      PARTIR DA DEFINICAO DO GRAU DO POLINOMIO DESEJAVEL ( DE 2
C      A 9) E EXPORTA ESTES VALORES NO ARQUIVO DE SAIDA.
C-----
C      CHARACTER*60 DAT
C      CHARACTER*60 ESTA
C      REAL X(20),Y(20),RES(20),T(400),AMP(400),DT(400),DTI(400)
C      REAL PXX(19),PXY(10),H(10,10),B(10),AMPC(400),XX(20)
C
C
C
C      W R I T E ( 6 , * ) '
=====
C      WRITE(6,*)'PROGRAMA INTERPOL.FOR - COPYRIGHT @ 1994 SILVIO'
C      WRITE(6,*)'          VERSAO DE JULHO DE 1994'
C      W R I T E ( 6 , * ) '
=====
C
C      VERSAO DE 20/07/1994
C
C
C=====
C      LEITURA DOS DADOS DE ENTRADA E DEFINICOES DOS ARQUIVOS
C=====
C
C
C      ABERTURA DE ARQUIVO DE DADOS PROVISORIOS
C
C
C      LEITURA DOS DADOS DO SISTEMA DE AQUISICAO
C
C
1000  WRITE(6,*)' DIGITE O NOME DO ARQUIVO DE DADOS DE ENTRADA'
      READ(*,'(A)')DAT

```

```

OPEN(10,FILE=DAT,STATUS='OLD')
N=0
M=1
DT(1)=0.
DTM=0.
1501 N=N+1
READ(10,*,END=1599)AMP(N),T(N)
IF(N.GT.1)THEN
M=M+1
DT(M)=T(N)-T(N-1)
IF(DT(M).GT.DT(M-1).AND.DT(M).GT.DTM1)DTM1=DT(M)
DTM=DTM+T(N)-T(N-1)
ENDIF
GOTO 1501
1599 CONTINUE
C
C
CLOSE(10,STATUS='KEEP')
C
1500 WRITE(6,*)'DIGITE O NOME DO ARQUIVO COM DADOS ESTATISTICOS'
WRITE(6,*)' E DAS ORDENADAS INTERPOLADAS PARA OS DELTA T'
READ(*,'(A)')ESTA
OPEN(14,FILE=ESTA,STATUS='UNKNOWN')
WRITE(14,161)T(1),AMP(1)
C
161 FORMAT(F6.0,5X,F7.2)
C
C DETERMINACAO DAS ABCISSAS HORARIAS
C
N=N-1
INTERV=INT((DTM)/M)+1
NI=INT(T(N)/INTERV)-1
WRITE(6,*)' O VALOR DO MAIOR INTERVALO E ',DTM1,' SEGUNDOS'
WRITE(6,*)' O VALOR DE DELTA T PARA INTERPOLACAO E ',INTERV
C
DO 1598 J=1,NI
DTI(J)=FLOAT(J*INTERV)
1598 CONTINUE
C
C DETERMINACAO DO GRAU DE REGRESSAO ITERATIVA
C
1502 WRITE(6,*)' FORNECA O GRAU DO POLINOMIO PARA INTERPOLACAO'
READ(5,*)NDEG
C
INTV=NDEG*INTERV
C
C=====
C DETERMINACAO DA AMPLITUDE PARA AS ABCISSAS HORARIAS
C=====
C
C=====

```

```

C      MONTAGEM DO CONJUNTO DE PONTOS PARA INTERPOLACAO
C=====
C
2000      DO 1597 NN=1,NI
          IN=0
          DO 1596 II=1,N

          IF(T(II).GE.(DTI(NN)-INTV).AND.T(II).LE.(DTI(NN)+INTV)) THEN
            IN=IN+1
            X(IN)=T(II)
            XX(IN)=X(IN)/1000.
            Y(IN)=AMP(II)
          ENDIF
1596      CONTINUE
          RM=0.
C      AJUSTE POLINOMIAL ITERATIVO POR MINIMOS QUADRADOS
C
C      GRAU MAXIMO DE AJUSTE: 9
C
C      FORMACAO DOS PRODUTOS
C
2007      DO 65 I=1,19
          PXX(I) = 0.0
          DO 60 J=1,IN
            PXX(I) = PXX(I) +XX(J)**(I-1)
60        CONTINUE
C
65        CONTINUE
C
          DO 75 I=1,10
            PXY(I) = 0.0
C
          DO 70 J=1,IN
            PXY(I) = PXY(I) +XX(J)**(I-1) *Y(J)
7        CONTINUE
C
75        CONTINUE
C
C      AJUSTE POLINOMIAL DE GRAU ESPECIFICADO
C
C      NNN=NDEG+1
C
C      FORMACAO DO SISTEMA NORMAL
C
          DO 85 I=1,NNN
            DO 80 J=1,NNN
              H(I,J) = PXX(I+J-1)
80          CONTINUE
C
85          CONTINUE
C
          DO 95 I=1,NNN

```

```

          B(I) = PXY(I)
95      CONTINUE
C
C      SOLUCAO DO SISTEMA NORMAL
C
          CALL LUDCMP(H,NNN,10,IWK,D)
          CALL LUBKSB(H,NNN,10,IWK,B)
C
C      CALCULO DA AMPLITUDE DA ORDENADA, EM FUNCAO DA SOLUÇÃO
C      ITERATIVA DO SISTEMA NORMAL
C
          AMPC(NN)=0.
          DO 99 J=NNN,1,-1
          AMPC(NN)=AMPC(NN)*(DTI(NN))/1000.+B(J)
99      CONTINUE
C
C      CALCULO DOS RESIDUOS
C
          DO 105 I=1,IN
          AUX = 0.0
          DO 100 J=NNN,1,-1
          AUX = AUX*XX(I) +B(J)
100     CONTINUE
          RES(I) = Y(I) -AUX
105     CONTINUE
C
C      CALCULO DO RESIDUO QUADRATICO MEDIO
C
          AUX = 0.0
C
          DO 110 I=1,IN
          AUX = AUX +RES(I)**2
110     CONTINUE
C
          AUX = SQRT(AUX)/IN
          RM=RM+AUX
C
C      SAIDA DOS RESULTADOS
C
          WRITE(14,16) DTI(NN),AMPC(NN),AUX
16      FORMAT(F6.0,5X,F7.2,5X,F10.3)
1597    CONTINUE
          RM=RM/NI
          WRITE(6,*) ' RESIDUO MEDIO P/GRAU ',NDEG,'= ',RM
          WRITE(6,*) ' DESEJA REALIZAR A REGRESSAO PARA OUTRO GRAU?'
          WRITE(6,*) '              SIM(1).....NAO(0) '
          READ(5,*) IDEN
          IF(IDEN.EQ.1) THEN
          CLOSE(14,STATUS='KEEP')
          GOTO 1500
          ENDIF
          STOP

```

END

```

C-----
SUBROUTINE LUDCMP(A,N,NP,INDX,D)
PARAMETER (NMAX=100,TINY=1.0E-20)
DIMENSION A(NP,NP),INDX(N),VV(NMAX)
D=1.
DO 12 I=1,N
AAMAX=0.
DO 11 J=1,N
IF (ABS(A(I,J)).GT.AAMAX) AAMAX=ABS(A(I,J))
11 CONTINUE
IF (AAMAX.EQ.0.) PAUSE 'Singular matrix.'
VV(I)=1./AAMAX
12 CONTINUE
DO 19 J=1,N
IF (J.GT.1) THEN
DO 14 I=1,J-1
SUM=A(I,J)
IF (I.GT.1) THEN
DO 13 K=1,I-1
SUM=SUM-A(I,K)*A(K,J)
13 CONTINUE
A(I,J)=SUM
ENDIF
14 CONTINUE
ENDIF
AAMAX=0.
DO 16 I=J,N
SUM=A(I,J)
IF (J.GT.1) THEN
DO 15 K=1,J-1
SUM=SUM-A(I,K)*A(K,J)
15 CONTINUE
A(I,J)=SUM
ENDIF
DUM=VV(I)*ABS(SUM)
IF (DUM.GE.AAMAX) THEN
IMAX=I
AAMAX=DUM
ENDIF
16 CONTINUE
IF (J.NE.IMAX) THEN
DO 17 K=1,N
DUM=A(IMAX,K)
A(IMAX,K)=A(J,K)
A(J,K)=DUM
17 CONTINUE
D=-D
VV(IMAX)=VV(J)
ENDIF
INDX(J)=IMAX
IF (J.NE.N) THEN

```



```

      IF(A(J,J).EQ.0.)A(J,J)=TINY
      DUM=1./A(J,J)
      DO 18 I=J+1,N
      A(I,J)=A(I,J)*DUM
18    CONTINUE
      ENDIF
19    CONTINUE
      IF(A(N,N).EQ.0.)A(N,N)=TINY
      RETURN
      END
C-----
      SUBROUTINE LUBKSB(A,N,NP,INDX,B)
      DIMENSION A(NP,NP),INDX(N),B(N)
      II=0
      DO 12 I=1,N
      LL=INDX(I)
      SUM=B(LL)
      B(LL)=B(I)
      IF (II.NE.0) THEN
      DO 11 J=II,I-1
      SUM=SUM-A(I,J)*B(J)
11    CONTINUE
      ELSE IF (SUM.NE.0.) THEN
      II=I
      ENDIF
      B(I)=SUM
12    CONTINUE
      DO 14 I=N,1,-1
      SUM=B(I)
      IF(I.LT.N) THEN
      DO 13 J=I+1,N
      SUM=SUM-A(I,J)*B(J)
13    CONTINUE
      ENDIF
      B(I)=SUM/A(I,I)
14    CONTINUE
      RETURN
      END

```

#### 4. PROGRAMA FFTSIL.M QUE REALIZA A TRANSFORMADA DE FOURIER DOS DADOS INTERPOLADOS PELO PROGRAMA INTERPOL.FOR

Os dados interpolados e filtrados das altas frequências pelo programa INTERPOL.FOR podem ser submetidos ao programa FFTSIL.M, realizado dentro ambiente MATLAB. Portanto, este programa

não possui versão executável a ser implantada em outros microcomputadores que não possuam o aplicativo MATLAB implantado. O programa solicita que o nome do arquivo de entrada seja ent.dat e grava a saída, que é a densidade de potência espectral, num arquivo de nome saip.mat. Este programa prevê um número de dados entre 128 e 256, ou seja entre as estas potências de 2 para utilização do algoritmo RADIX 2.

```
% Programa realiza a FFT de um conjunto de dados equiespacados
% Copyright © 1994 Sílvia H.S. Schwab
% Numero de dados ente 128 e 256
%
% Entrada dos dados
%
clear all
load ent.dat
%
% Verificação do tamanho do arquivo de dados
m1 = size(ent);
m = m1(1,1);
%
x=[];y=[];Z=[];
% Construção do arquivo para a Análise de Fourier
%
for i=1:m,
    x(i)=ent(i,1);
end
for i=1:m,
    y(i)=ent(i,2);
end
for i=1:m,
    z(i)=ent(i,3);
end
for i=m:256,
    x(i)=0.;
    y(i)=0.;
    z(i)=0.;
end
%
% Plotagem do sinal complexo
%
plot(x,y), title('Sinal no dominio do tempo')
xlabel('tempo(s)')
ylabel('amplitude(u)')
```

```

pause
%
% Realizacao da FFT
Y = fft(y,256);
YY=Y';
pause
%
% Calculo da densidade de potencia espectral
%
Pyy = Y.*conj(Y)/m;
Pyy1=Pyy';
pause
%
% construcao do eixo das frequencias
%
f = .005/m*(0:127);
%
% Plotagem da densidade de potencia espectral
%
plot(f,Pyy(1:(128))), title('Densidade de potencia espectral')
xlabel('Frequencia(Hz)'),pause
PYT=Pyy';
clear m1
clear ent
clear f
clear i
whos
pause
save saip.mat PYT /ascii

```

Se o número de dados for entre 64 e 128, então utiliza-se o mesmo programa, porém com construções diferentes em termos do número de dados no eixo das frequências, ou seja:

```

% Programa realiza a FFT de um conjunto de dados equiespacados
% Copyright © 1994 Sivia H. S. Schwab
% Numero de dados entre 56 e 128
%
% Entrada dos dados
%
clear all
load ent.dat
%
% Verificação do tamanho da amostra
%

```

```

m1 = size(ent);
m = m1(1,1);
x=[];y=[];Y=[]
%
% Construcao do arquivo para Análise de Fourier
%
for i=1:m,
    x(i)=ent(i,1);
end
for i=1:m,
    y(i)=ent(i,2);
end
for i=1:m,
    z(i)=ent(i,3);
end
for i=m:128,
    x(i)=0.;
    y(i)=0.;
    z(i)=0.;
end
%
% Plotagem do sinal
%
plot(x,y), title('Sinal no dominio do tempo')
xlabel('tempo(s)')
ylabel('amplitude(u)')
pause
%
% Realizacao da FFT
Y = fft(y,128);
YY=Y';
pause
%
% calculo da densidade de potencia espectral
%
Pyy = Y.*conj(Y)/m;
Pyy1=Pyy';
pause
%
% construcao do eixo das frequencias
%
f = .005/m*(0:63);
%
% Plotagem da densidade de potencia espectral
%
plot(f,Pyy(1:(64))), title('Densidade de potencia espectral')
xlabel('Frequencia(Hz)'),pause
PYT=Pyy';
clear m1
clear ent
clear f
clear i

```

```
whos
pause
save saip.mat PYT /ascii
```

#### 4. OUTROS PROGRAMAS UTILIZADOS

Vários outros programas foram utilizados para a montagem dos resultados a serem analisados no Cap.IV. Dentre estes, alguns merecem destaque porque podem também ser utilizados por usuários, mesmo que fora do contexto da Análise de Fourier propriamente dita. O primeiro deles é o programa TEMP.FOR que permite o levantamento imediato dos valores dos períodos associados a cada valor de densidade de potência espectral. O programa requisita: o número de dados, o tempo total de amostragem, incluindo-se o tempo no arquivo correspondente aos valores preenchidos com zeros, o nome do arquivo de entrada e o nome do arquivo de saída.

```
$debug
```

```
C
C      PROGRAMA TEMP.FOR COLOCA A DENSIDADE DE POTENCIA ESPECTRAL
C      GERADA PELA ANALISE DE FOURIER EM UMA COLUNA AO LADO DOS
C      VALORES DOS PERIODO CORRESPONDENTES
C
      DIMENSION YPP(500),F(500),T(500),DP(500),SEC(500),XP(500)
      CHARACTER*30 ARQ1,ARQS
      WRITE(*,5)
5      FORMAT(20X,' INFORME AO PROGRAMA OS SEGUINTE DADOS:')
      WRITE(*,110)
110     FORMAT(/2X,' NUMERO DE DADOS.....: '$)
      READ(*,*)M
      WRITE(*,14)
14     FORMAT(/2X,' TEMPO DE AMOSTRAGEM.....: '$)
      READ(*,*)TA
      WRITE(*,8)
8      FORMAT(/2X,' ENTRE COM O ARQUIVO DE DADOS.....: '$)
      READ(*,9) ARQ1
```

```

9      FORMAT(A30)
      WRITE(*,20)
20     FORMAT(/2X,' ARQUIVO DOS RESULTADOS .....: '$)
      READ(*,26) ARQS
26     FORMAT(A30)
      WRITE(*,60)
60     FORMAT(//,20X,' Em processamento.AGUARDE POR FAVOR.....',)
      OPEN(1,FILE=ARQ1,STATUS='OLD')
      OPEN(2,FILE=ARQS,STATUS='UNKNOWN')
C***** LENDO O VETOR DA DENSIDADE DE POTENCIA ESPECTRAL
      DO 21 I=1,M
        READ(1,*)YPP(I)
21     CONTINUE
C*****CALCULANDO AS FREQUENCIAS E PERIODOS

      DO 10 I=1,M
        F(I)=I/TA
        T(I)=1/F(I)
        DP(I)=T(I)/60.
        XP(I)=INT(DP(I))
        SEC(I)=(DP(I)-INT(DP(I)))*60.
10     CONTINUE
C***** IMPRESSAO DOS DADOS E RESULTADOS
      CALL IMP(YPP,T,XP,SEC,M)
      STOP

      END
C*****F      I      M

C////////////////////////////////////
C////////////////////////////////////SUBROTINAS UTILIZADAS////////////////////////////////////
C////////////////////////////////////

      SUBROUTINE IMP(C,D,E,F,M)
      DIMENSION C(500),D(500),E(500),F(500)
      DO 11 I=1,M
11     CONTINUE
      WRITE(2,30)C(1),0.,0.,0.
30     FORMAT(F14.8,5X,F14.8,10X,F4.1,5X,F10.5)
      DO 25 I=2,M
        WRITE(2,111)C(I),D(I-1),E(I-1),F(I-1)
111    FORMAT(F14.8,5X,f14.8,10X,f4.1,5X,f10.5)
25     CONTINUE
      RETURN
      END

```

Outro programa utilizado na parte final de análise foi o programa SOMA.M, realizado em ambiente MATLAB, para contabilizar a

soma das densidades de potência espectral nos diversos compartimentos. O arquivo de entrada deve denominar-se `arq.dat` e corresponde ao arquivo de saída da densidade de potência espectral (`saip.mat`) calculada pelo programa `FFTSIL.M`. A saída deste programa é o arquivo `sai.dat`.

```
% Programa SOMA.M
%
% entrada de dados
%
load arq.dat
clear aux
%
% verificação do tamanho do arquivo
%
m1=size(arq);
m=m1(1,1);
%
% cálculo da soma das densidades em cada compartimento
for j=1:18,
    aux(j,1)=0;
end
for i=1:m,
    for l=9.0:-1.0:1.0,
        if arq(i,3)==1,
            if arq(i,4)>=30,
                aux((19-2*l),1)=aux((19-2*l),1)+arq(i,1);
            else
                aux((20-2*l),1)=aux((20-2*l),1)+arq(i,1);
            end
        end
    end
end
end
save sai.dat aux /ascii
```

## ANEXO I

Cálculos do azimute da Mira  
pelo Método das Passagens



# Arq.1- Método das Passagens com cronômetro

## 1ª observação

Data : 4/9/92       $L_m : 83^{\circ} 11' 56,90''$        $N' : 151^{\circ} 09' 10,90''$

Hora de início: 08 h 30 min

para o WILD T2/GAK1/GKK-3 : 19143 o valor de  $c : 3,03186''/s$

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	43,40			$a+ = 8,5$
2	- p/ +	230,40	-187,00		$a- = 8,4$
3	+ p/ -	417,90	+187,50	0,5	$\overline{a_m} = 8,45$
4	- p/ +	604,30	-186,40	1,1	
5	+ p/ -	792,00	+187,70	1,3	
6	- p/ +	978,60	-186,60	1,1	
7	+ p/ -	1166,00	+187,40	0,8	
8	+ p/ -	1352,30	-186,30	1,1	

$$\Delta t_m = \overline{0,9}$$

Cálculos:  $\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 23,0572953''$

$$N = N' + \Delta N = 151^{\circ} 09' 33,96''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 208^{\circ} 50' 26,00''$$

$$A_z = \beta + L_m = 292^{\circ} 02' 22,94''$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste.

## Arq.2- Método das Passagens com cronômetro

### 2ª observação

Data : 4/9/92       $L_m : 83^{\circ} 11' 56,90''$        $N' : 151^{\circ} 09' 10,90''$

Hora de início: 09 h 00 min

para o WILD T2/GAKI/GKK-3 : 19143 o valor de  $c : 3,03186''/s$

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	151,40			$a+ = 8,9$
2	- p/ +	338,00	-186,60		$a- = 8,9$
3	+ p/ -	525,20	+187,20	0,6	
4	- p/ +	711,90	-186,70	0,5	$a_m = 8,9$
5	+ p/ -	899,60	+187,70	1,0	
6	- p/ +	1086,20	-186,60	1,1	
7	+ p/ -	1273,60	+187,40	0,8	

$$\Delta t_m = \overline{0,8}$$

Cálculos:  $\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 21,5868432''$

$$N = N' + \Delta N = 151^{\circ} 09' 10,90''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 208^{\circ} 50' 27,50''$$

$$A_z = \beta + L_m = 292^{\circ} 02' 24,41''$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste.

### Arq.3- Método das Passagens com cronômetro

#### 3ª observação

Data : 4/9/92       $L_m : 83^{\circ} 11' 56,90''$        $N' : 151^{\circ} 09' 10,90''$

Hora de início: 09 h 45 min

para o WILD T2/GAKI/GKK-3 : 19143 o valor de  $c : 3,03186''/s$

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	5,00			$a+ = 9,8$
2	- p/ +	191,40	-186,40		$a- = 9,8$
3	+ p/ -	378,90	+187,50	1,1	
4	- p/ +	565,70	-186,80	0,7	$a_m = 9,8$
5	+ p/ -	753,30	+187,60	0,8	
6	- p/ +	940,30	-187,00	0,6	

$$\Delta t_m = \overline{0,8}$$

Cálculos:  $\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 23,7697824''$

$$N = N' + \Delta N = 151^{\circ} 09' 43,67''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 208^{\circ} 50' 25,30''$$

$$A_z = \beta + L_m = 292^{\circ} 02' 22,23''$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste.

#### Arg.4- Método das Passagens com cronômetro

##### 4ª observação

Data : 4/9/92       $L_m : 83^{\circ} 11' 56,90''$        $N' : 151^{\circ} 09' 10,90''$

Hora de início: 11 h 10 min

para o WILD T2/GAK1/GKK-3 : 19143 o valor de  $c : 3,03186''/s$

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	- p/ +	562,00			$a+ = 8,1$
2	+ p/ -	749,70	+187,70		$a- = 8,1$
3	- p/ +	936,60	-186,90	0,8	
4	+ p/ -	1123,60	+187,00	0,1	$a_m = 8,1$
5	- p/ +	1310,10	-186,50	0,5	
6	+ p/ -	1497,60	+187,50	1,0	
7	- p/ +	1684,20	-186,60	0,9	
			$\Delta t_m =$	$\overline{0,66}$	

Cálculos:  $\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 16,20832356''$

$$N = N' + \Delta N = 151^{\circ} 09' 27,11''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 208^{\circ} 50' 32,80''$$

$$A_z = \beta + L_m = 292^{\circ} 02' 29,79''$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste.

# Arq.5- Método das Passagens com cronômetro

## 5ª observação

Data : 4/9/92       $L_m : 83^{\circ} 11' 56,90''$        $N' : 151^{\circ} 09' 10,90''$

Hora de início: 16 h 00 min

para o WILD T2/GAK1/GKK-3 : 19143 o valor de  $c : 3,03186''/s$

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	22,40			$a+ = 9,4$
2	- p/ +	209,20	-186,80		$a- = 9,4$
3	+ p/ -	396,80	+187,60	0,8	$\overline{a_m} = 9,4$
4	- p/ +	583,40	-186,60	1,0	
5	+ p/ -	771,20	+187,80	1,2	
6	- p/ +	957,70	-186,50	1,3	

$$\Delta t_m = \overline{1,075}$$

Cálculos:  $\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 30,6369453$

$$N = N' + \Delta N = 151^{\circ} 09' 41,54''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 208^{\circ} 50' 18,40''$$

$$A_z = \beta + L_m = 292^{\circ} 02' 15,36''$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste.

# Arq.6- Método das Passagens com cronômetro

## 6ª observação

Data : 4/9/92       $L_m : 83^{\circ} 11' 56,90''$        $N' : 151^{\circ} 09' 10,90''$

Hora de início: 16 h 40 min

para o WILD T2/GAK1/GKK-3 : 19143 o valor de  $c : 3,03186''/s$

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	214,60			$a+ = 10,4$
2	- p/ +	398,60	-184,00		$a- = 10,2$
3	+ p/ -	586,40	+187,80	3,8	
4	- p/ +	773,00	-186,60	1,2	$\overline{a_m} = 10,3$
5	+ p/ -	960,40	+187,20	0,6	
6	- p/ +	1147,50	-187,10	0,2	

$$\Delta t_m = \overline{1,45}$$

Cálculos:  $\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 45,2808291$

$$N = N' + \Delta N = 151^{\circ} 09' 56,18''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 208^{\circ} 50' 03,82''$$

$$A_z = \beta + L_m = 292^{\circ} 02' 00,72''$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste.

# Arq.7- Método das Passagens com cronômetro

## 7ª observação

Data : 10/9/93       $L_m : 182^{\circ} 22' 15,10''$        $N' : 250^{\circ} 16' 30,10''$

Hora de início: 16 h 30 min

para o WILD T2/GAK1/GKK-3 : 19143 o valor de  $c : 3,03186''/s$

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	43,70			$a+ = 12,0$
2	- p/ +	224,20	-180,50		$a- = 10,8$
3	+ p/ -	417,80	+196,60	13,1	
4	- p/ +	598,50	-180,70	12,9	$a_m = 11,4$
5	+ p/ -	792,10	+193,60	12,9	
6	- p/ +	972,70	-180,60	13,0	
7	+ p/ -	1166,40	+193,70	13,1	
8	- p/ +	1346,80	-180,40	13,3	

$$\Delta t_m = 13,05$$

Cálculos:  $\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 451,04981222'' = 7' 31,05''$

$$N = N' + \Delta N = 250^{\circ} 24' 01,15''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 109^{\circ} 35' 58,80''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 13,90''$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste.

# Arq.8- Método das Passagens com cronômetro

## 8ª observação

Data : 10/9/93       $L_m : 182^{\circ} 22' 14,50''$        $N' : 250^{\circ} 16' 17,80''$

Hora de início: 10 h 30 min

para o WILD T2/GAK1/GKK-3 : 19143 o valor de  $c : 3,03186''/s$

i	senal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	67,70			$a+ = 11,8$
2	- p/ +	248,10	-180,40		$a- = 10,9$
3	+ p/ -	441,80	+193,70	13,3	
4	- p/ +	621,70	-179,90	13,8	$a_m = 11,1$
5	+ p/ -	815,80	+194,10	14,2	
6	- p/ +	995,60	-179,80	14,3	
7	+ p/ -	1189,50	+193,90	14,1	
8	- p/ +	1369,90	-180,40	13,5	

$$\Delta t_m = 13,87$$

Cálculos:  $\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 466,77607'' = 7' 46,78''$

$$N = N' + \Delta N = 250^{\circ} 24' 04,58''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 109^{\circ} 35' 55,40''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 09,92''$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste.



# Arq.9- Método das Passagens com cronômetro

## 9ª observação

Data : 14/9/93       $L_m : 182^\circ 22' 15,10''$        $N' : 250^\circ 16' 31,50''$

Hora de início: 10 h 45 min

para o WILD T2/GAK1/GKK-3 : 19143 o valor de  $c : 3,03186''/s$

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	- p/ +	69,40			$a+ = 9,5$
2	+ p/ -	264,60	+195,20		$a- = 8,2$
3	- p/ +	443,60	-179,00	16,2	
4	+ p/ -	639,20	+195,60	16,6	$a_m = 8,85$
5	- p/ +	818,00	-178,80	16,8	
6	+ p/ -	1013,00	+195,00	16,2	
7	- p/ +	1101,90	-178,90	16,1	
8	+ p/ -	1387,50	+195,60	16,7	

$$\Delta t_m = 16,43$$

Cálculos:  $\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 440,8491192'' = 7' 20,85''$

$$N = N' + \Delta N = 250^\circ 23' 50,80''$$

$$\beta = 360^\circ - N = 109^\circ 36' 09,15''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^\circ 58' 24,20''$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste.

## Arq.10- Método das Passagens com cronômetro

## 10ª observação

Data : 14/9/93       $L_m : 182^\circ 22' 15,10''$      $N' : 250^\circ 16' 30,00''$

Hora de início: 13 h 45 min

para o WILD T2/GAK1/GKK-3 : 19143 o valor de  $c : 3,03186''/s$

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	- p/ +	100,50			$a+ = 11,4$
2	+ p/ -	294,50	+194,00		$a- = 10,2$
3	- p/ +	475,00	-180,50	13,5	
4	+ p/ -	668,70	+193,70	13,2	$a_m = 11,8$
5	- p/ +	849,20	-180,50	13,2	
6	+ p/ -	1103,20	+194,00	13,5	
7	- p/ +	1223,50	-180,30	13,7	
8	+ p/ -	1417,50	+194,00	13,7	

$$\Delta t_m = 13,47$$

Cálculos:  $\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 441,0628654'' = 7' 21,06''$

$$N = N' + \Delta N = 250^\circ 23' 49,70''$$

$$\beta = 360^\circ - N = 109^\circ 36' 10,20''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^\circ 58' 25,30''$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste.

# Arq.11- Método das Passagens com cronômetro

## 11ª observação

Data : 14/9/93       $L_m : 182^{\circ} 22' 15,10''$        $N' : 250^{\circ} 16' 33,00''$

Hora de início: 12 h 00 min

para o WILD T2/GAK1/GKK-3 : 19143 o valor de  $c : 3,03186''/s$

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	- p/ +	67,50			$a+ = 12,2$
2	+ p/ -	260,60	+193,10		$a- = 11,0$
3	- p/ +	441,30	-180,70	12,4	
4	+ p/ -	635,00	+193,70	13,0	$a_m = 11,6$
5	- p/ +	815,50	-180,50	13,2	
6	+ p/ -	1008,80	+193,30	12,8	
7	- p/ +	1189,90	-181,10	12,2	
8	+ p/ -	1383,20	+193,30	12,2	

$$\Delta t_m = 12,63$$

Cálculos:  $\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 444,1917449'' = 7' 24,19''$

$$N = N' + \Delta N = 250^{\circ} 23' 57,10''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 109^{\circ} 36' 02,81''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 18,00''$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste.

# Arq.12- Método das Passagens com cronômetro

## 12ª observação

Data : 13/9/93       $L_m : 182^\circ 22' 15,10''$      $N' : 250^\circ 16' 32,00''$

Hora de início: 10 h 00 min

para o WILD T2/GAK1/GKK-3 : 19143 o valor de  $c : 3,03186''/s$

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	73,10			$a+ = 13,2$
2	- p/ +	194,70	-181,60		$a- = 12,0$
3	+ p/ -	387,50	+192,80	11,2	
4	- p/ +	568,60	-181,10	11,7	$a_m = 12,6$
5	+ p/ -	761,70	+193,10	12,0	
6	- p/ +	943,40	-181,70	11,4	
7	+ p/ -	1136,10	+192,70	11,0	
8	- p/ +	11317,50	-181,40	11,3	

$$\Delta t_m = 11,43$$

Cálculos:  $\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 436,6424135'' = 7' 16,64''$

$$N = N' + \Delta N = 250^\circ 23' 48,60''$$

$$\beta = 360^\circ - N = 109^\circ 36' 11,30''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^\circ 58' 26,40''$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste.

## ANEXO II

Cálculos do azimuth da mira pelo Método das Passagens  
com o microcomputador como cronógrafo

## SEC1.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 27/09/93     $L_m$  :  $182^{\circ}22'15,10''$      $N'$  :  $250^{\circ}16'30,50''$      $c$  : 3,03186 "/s

Hora do início: 10h 24min 58s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	82,66868			$a+ = 10,2$
2	- p/ +	262,05139	-179,38271		$a- = 9,0$
3	+ p/ -	456,82184	+194,77045	15,388	
4	- p/ +	636,69891	-179,87707	14,893	$\overline{a_m} = 9,6$
5	+ p/ -	831,41101	+194,71210	14,835	
6	- p/ +	1010,80054	-179,38953	15,322	
7	+ p/ -	1205,39929	+194,59875	15,209	
8	+ p/ -	1384,95019	-179,55009	15,049	
9	- p/ +	1579,76880	+194,81861	15,269	
10	+ p/ -	1759,20984	-179,44104	15,378	

$$\Delta t_m = 15,1616 \sigma_{n-1} = \pm 0,2101$$

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 441,29207'' = 7' 21,2921'' = 7' 21,29''$$

$$N = N' + \Delta N = 250^{\circ} 23' 51,70''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 109^{\circ} 36' 08,29''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 23,30''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_i$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 1,38 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC2.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 27/09/93     $L_m$  :  $182^{\circ}22'15,10''$      $N'$  :  $250^{\circ}16'30,50''$      $c$  : 3,03186 "/s

Hora do início: 11h 16min 30s

i	sinai	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	80,40962			$a+ = 11,4$
2	- p/ +	260,56824	-180,15862		$a- = 10,2$
3	+ p/ -	454,50781	+193,93957	13,781	
4	- p/ +	634,60809	-180,10028	13,839	$a_m = 10,8$
5	+ p/ -	823,93909	+189,93310	9,833	
6	- p/ +	1008,86767	-184,92853	5,005	
7	+ p/ -	1202,75915	+193,89148	14,006	
8	+ p/ -	1382,58813	-179,82898	14,220	
9	- p/ +	1576,63769	+194,04956	14,440	
10	+ p/ -	1756,24695	-179,60916	14,224	
11	+ p/ -	1950,08008	+193,66821	13,959	
12	- p/ +	2129,78906	-179,55103	14,117	

$$\Delta t_m = 14,0732 \quad \sigma_{n-1} = \pm 0,2199$$

Cálculos: 1) do azimuth giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 461,2129975 = 7' 41,2130'' = 7' 42,21''$$

$$N = N' + \Delta N = 250^{\circ} 24' 11,70''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 109^{\circ} 35' 48,20''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 03,39''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_i$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 1,56 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste; foram eliminadas para a média a 2ª e a 3ª diferenças de tempo devido ao seu claro distanciamento dos outros valores, evidenciando erro grosseiro cometido nas leituras.

## SEC3.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 29/09/93       $L_m$  :  $182^{\circ}22'15,10''$        $N'$  :  $250^{\circ}16'33,50''$        $c$  :  $3,03186''/s$

Hora do início: 14h 39min 39s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	81,77948			$a+ = 10,4$
2	- p/ +	261,01119	-179,23163		$a- = 9,1$
3	+ p/ -	455,71976	+194,70865	15,477	
4	- p/ +	65,059899	-179,37923	15,329	$a_m = 9,75$
5	+ p/ -	829,75958	+194,66059	15,281	
6	- p/ +	1009,14917	-179,38959	15,271	

$$\Delta t_m = 15,3395 \quad \sigma_{n-1} = 0,09501$$

Cálculos: 1) do azimuth giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 449,410339'' = 7'29,4103'' = 7'29,41''$$

$$N = N' + \Delta N = 250^{\circ} 24' 02,93''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 109^{\circ} 35' 57,00''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 12,10''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_i$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 0,6 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;



## SEC4.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 29/09/93  $L_m$  :  $182^{\circ}22'15,10''$   $N'$  :  $250^{\circ}19'44,50''$   $c$  : 3,03186 "/s

Hora do início: 15h 49min 57s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}$ (s)	$\Delta t_i$ (s)	amplitude
1	+ p/ -	82,65839			$a+ = 10,2$
2	- p/ +	265,34042	-179,23163		$a- = 9,5$
3	+ p/ -	456,86987	+194,70865	8,847	
4	- p/ +	659,16742	-179,37923	9,232	$a_m = 9,85$
5	+ p/ -	830,85821	+194,66059	9,393	
6	- p/ +	1013,43042	-179,38959	9,118	

$$\overline{\Delta t_m} = 9,1475 \quad \sigma_{n-1} = 0,2299$$

Cálculos: 1) do azimuth giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 273,1878138'' = 4' 33,1878'' = 4' 33,19''$$

$$N = N' + \Delta N = 250^{\circ} 24' 17,60''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 109^{\circ} 35' 42,30''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 57' 57,40''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_i$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\overline{\Delta t_m}} \times 100 \% = 2,5 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC5.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 30/09/93       $L_m : 182^{\circ}22'19,10''$        $N' : 250^{\circ}30'45,50''$        $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 14h 36min 34s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	66,84151			$a+ = 12,0$
2	- p/ +	259,63098	-192,78947		$a- = 10,9$
3	+ p/ -	441,04956	+181,41458	-11,371	
4	- p/ +	634,00037	-192,95081	-11,532	$a_m = \overline{11,45}$
5	+ p/ -	815,25079	+181,25042	-11,700	
6	- p/ +	1008,10205	-192,85126	-11,601	
7	+ p/ -	1189,08118	+180,97913	-11,872	
8	- p/ +	1381,98047	-192,89929	-11,920	
9	+ p/ -	1563,34082	+181,36035	-11,539	
10	- p/ +	1755,80066	-192,45984	-11,099	
11	+ p/ -	1937,21924	+181,41858	-11,041	
12	- p/ +	2130,17017	-192,95093	-11,532	
13	+ p/ -	2311,21094	+181,04077	-11,910	
14	- p/ +	2504,16186	-192,95092	-11,910	
15	+ p/ -	2684,81152	+181,64966	-12,301	
16	- p/ +	2878,15015	-193,33863	-12,689	
17	+ p/ -	3059,23926	+181,08911	-12,249	
18	- p/ +	3252,18994	-192,95068	-11,861	

$$\Delta t_m = -11,7478 \quad \sigma = \pm 0,4432$$

Cálculos: 1) cálculo do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = -407,8224922'' = -6'47,8225'' = -6'47,82''$$

$$N = N' + \Delta N = 250^{\circ}23'57,60''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 109^{\circ}36'02,32''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ}58'21,40''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_i$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_n - 1}{\Delta t_m} \times 100 \% = 3,77 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC8.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 4/10/93  $L_m : 182^{\circ}22'15,10''$   $N' : 250^{\circ}03'20,00''$   $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início : 11h 0min 03 s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui} (s)$	$\Delta t_i (s)$	amplitude
1	+ p/ -	89,58000			$a+ = 10,2$
2	- p/ +	255,34999	-165,76999		$a- = 9,0$
3	+ p/ -	463,57000	+208,22001	42,450	
4	- p/ +	629,11005	-165,54005	42,680	$a_m = 9,6$
5	+ p/ -	837,45001	+208,33996	42,800	
6	- p/ +	1003,42999	-165,97998	42,360	
7	+ p/ -	1211,26989	+207,83990	41,860	
8	+ p/ -	1376,64990	-165,38000	42,460	
9	- p/ +	1585,26001	+208,61011	43,230	
10	+ p/ -	1750,75000	-165,48999	43,120	
11	+ p/ -	1958,92004	+208,17004	42,680	
12	- p/ +	2124,68017	-165,76013	42,410	
13	+ p/ -	2332,90004	+208,21998	42,460	
14	- p/ +	2498,83008	-165,92993	42,290	

$$\Delta t_m = 42,5670 \quad \sigma_{n-1} = 0,3700$$

Cálculos: 1) do azimuth giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 1238,948972'' = 20' 38,9489723'' = 20' 38,95''$$

$$N = N' + \Delta N = 250^{\circ} 37' 58,90''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 109^{\circ} 36' 01,06''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 16,10''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_i$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 0,97 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste

## SEC9.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 4/10/93     $L_m$  :  $182^{\circ}22'15,10''$      $N'$  :  $250^{\circ}04'15,10''$      $c$  : 3,03186 "/s

Hora do início : 14h 55min 24s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	85,78999			$a+ = 10,5$
2	- p/ +	250,50994	-164,71995		$a- = 7,2$
3	+ p/ -	459,33999	+208,83006	44,110	
4	- p/ +	624,77997	-165,43997	43,311	$\overline{a_m} = 8,8$
5	+ p/ -	833,21997	+208,44000	43,000	
6	- p/ +	998,59997	-165,38000	43,060	
7	+ p/ -	1207,20996	+208,60999	43,230	
8	+ p/ -	1372,36999	-165,16003	43,450	
9	- p/ +	1581,14001	+208,77002	43,610	
10	+ p/ -	1746,67993	-165,65926	43,110	
11	+ p/ -	1954,95996	+208,28003	42,620	
12	- p/ +	2120,22998	-165,27002	43,010	
13	+ p/ -	2328,78003	+208,55005	43,280	
14	- p/ +	2494,00000	-165,21997	43,330	

$$\Delta t_m = 42,260 \overline{\sigma_{n-1}} = 0,3683$$

Cálculos: 1) do azimuth giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 1154,192719'' = 19'14,1927'' = 19'14,19''$$

$$N = N' + \Delta N = 250^{\circ} 23' 23,11''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 109^{\circ} 36' 36,80''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 51,90''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_i$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 0,85 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste, grande instabilidade por ocasião da 11ª passagem.

## SEC10.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 5/10/93       $L_m$  :  $182^{\circ}22'32,50''$        $N'$  :  $250^{\circ}04'15,10''$        $c$  :  $3,03186''/s$

Hora do início: 14h 58min 46s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	91,61999			$a+ = 11,2$
2	- p/ +	258,64999	-167,03000		$a- = 8,0$
3	+ p/ -	465,50000	+206,85000	39,820	
4	- p/ +	632,40997	-166,90997	39,940	$a_m = 9,6$
5	+ p/ -	839,36999	+206,95993	40,049	
6	- p/ +	1006,57000	-167,20001	39,759	
7	+ p/ -	1213,75000	+207,18000	39,980	
8	+ p/ -	1380,66003	-166,91000	40,270	
9	- p/ +	1585,79004	+207,13000	40,220	
10	+ p/ -	1754,27002	-166,47998	40,650	
11	+ p/ -	1961,56000	+207,29004	40,810	
12	- p/ +	2128,31006	-167,75000	40,540	
13	+ p/ -	2335,48999	+207,17993	40,430	
14	- p/ +	2502,13030	-166,64031	40,540	

$$\Delta t_m = 40,251 \quad \sigma_{n-1} = 0,3452$$

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 1171,53981'' = 19'31,5398'' = 19'31,54''$$

$$N = N' + \Delta N = 250^{\circ} 23' 46,60''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 109^{\circ} 36' 13,30''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 45,80''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 0,857 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste; esta série para ser realizada foram necessárias três tentativas devido à instabilidade gerada pelas pequenas oscilações.

## SEC11.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 05/10/93     $I_m$  :  $182^{\circ}22'32,50''$      $N'$  :  $250^{\circ}01'28,00''$      $c$  : 3,03186 "/s

Hora do início: 17h 20min 40s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	88,60000			$a+ = 11,4$
2	- p/ +	252,83000	-164,23000		$a- = 7,8$
3	+ p/ -	463,03003	+210,20003	45,970	$a_m = 9,6$
4	- p/ +	627,02997	-163,99997	46,200	
5	+ p/ -	837,01001	+209,98004	45,980	
6	- p/ +	1001,18994	-164,17998	45,800	
7	+ p/ -	1211,32996	+210,14002	45,960	
8	- p/ +	1375,01001	-163,68005	46,460	
9	+ p/ -	1585,31995	+210,30994	46,230	
10	- p/ +	1749,32996	-164,01000	46,300	
11	+ p/ -	1959,30994	+209,97998	45,970	
12	- p/ +	2123,37012	-164,06126	45,919	
13	+ p/ -	2333,62013	+210,25000	46,189	
14	- p/ +	2497,25000	-163,62987	46,620	

$$\Delta t_m = 46,167 \quad \sigma_{n-1} = 0,2434$$

Cálculos: 1) do azimuth giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 1342,740454'' = 22'22,7404'' = 22'22,74''$$

$$N = N' + \Delta N = 250^{\circ} 23' 50,70''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 109^{\circ} 36' 09,26''$$

$$A_z = \beta + I_m = 291^{\circ} 58' 41,70''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_i$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 0,528 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC12.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 06/10/93       $L_m : 182^{\circ}22'32,50''$        $N' : 250^{\circ}10'53,00''$        $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 8h 53min 5s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	61,63000			$a+ = 11,0$
2	- p/ +	235,80000	-174,17000		$a- = 8,8$
3	+ p/ -	435,45001	+199,65001	25,480	
4	- p/ +	610,05997	-174,60999	25,040	$a_m = 9,9$
5	+ p/ -	809,82000	+199,76000	25,060	
6	- p/ +	984,16000	-174,34000	25,420	
7	+ p/ -	1183,86999	+199,70999	25,370	
8	- p/ +	1358,08996	-174,21997	25,490	
9	+ p/ -	1557,95996	+199,87000	25,650	
10	- p/ +	1732,23999	-174,28003	25,590	
11	+ p/ -	1932,05994	+199,81995	25,540	
12	- p/ +	2105,94995	-173,89001	25,930	
13	+ p/ -	2306,27002	+200,32007	26,430	
14	- p/ +	2480,48999	-174,21997	26,100	
15	+ p/ -	2679,97998	+199,48999	25,270	
16	- p/ +	2854,41992	-174,43994	25,050	
17	+ p/ -	3054,30005	+199,88013	25,440	
18	- p/ +	3228,68994	-174,38989	25,490	
19	+ p/ -	3428,44995	+199,76001	25,370	
20	- p/ +	3602,56006	-174,11011	25,670	

$$\Delta t_m = 25,5372 \quad \sigma_{n-1} = 0,3394$$

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 766,50963'' = 12'46,50963'' = 12'41,46''$$

$$N = N' + \Delta N = 250^{\circ} 23' 39,50''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 109^{\circ} 36' 20,40''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 52,90''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_i$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 1,33 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste; atenuação visual do lado + a partir da 6ª passagem.

## SECL3.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 06/10/93       $L_m$  :  $182^{\circ}22'32,50''$        $N'$  :  $250^{\circ}02'40,00''$        $c$  : 3,03186 "/s

Hora do início: 10h 44min 37s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}$ (s)	$\Delta t_i$ (s)	amplitude
1	+ p/ -	87,33000			$a+ = 12,4$
2	- p/ +	254,97002	-167,64002		$a- = 8,9$
3	+ p/ -	460,98999	+206,01997	38,389	
4	- p/ +	629,01001	-168,02002	38,000	$a_m = 10,6$
5	+ p/ -	835,47998	+206,46997	38,450	
6	- p/ +	1002,94000	-167,46002	39,010	
7	+ p/ -	1209,94000	+206,63007	39,170	
8	- p/ +	1376,82007	-167,25000	39,380	
9	+ p/ -	1583,56006	+206,73999	39,490	
10	- p/ +	1750,75000	-167,18994	39,550	
11	+ p/ -	1957,44006	+206,69006	39,500	
12	- p/ +	2125,07007	-167,63001	39,060	
13	+ p/ -	2331,65015	+206,58008	39,950	
14	- p/ +	2499,00000	-167,34985	39,230	

$$\Delta t_m = 39,098 \overline{\sigma_{n-1}} = 0,5628649$$

Cálculos: 1) do azimuth giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 1256,5285'' = 20'56,5284'' = 20'56,53''$$

$$N = N' + \Delta N = 250^{\circ} 23' 36,50''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 109^{\circ} 36' 23,40''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 55,90''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 1,43 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste; atenuação visual do lado + a partir da 6ª passagem.



## SEC14.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 06/10/93     $L_m$  :  $182^{\circ}22'15,10''$      $N'$  :  $250^{\circ}05'33,00''$      $c$  : 3,03186 "/s

Hora do início: 13h 50min 54s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}$ (s)	$\Delta t_i$ (s)	amplitude
1	+ p/ -	80,45999			$a+ = 12,8$
2	- p/ +	251,56001	-171,10002		$a- = 9,8$
3	+ p/ -	454,83996	+203,27959	32,179	
4	- p/ +	625,59997	-170,76037	32,519	$a_m = 11,3$
5	+ p/ -	828,54999	+202,95002	32,190	
6	- p/ +	999,59003	-171,04004	31,910	
7	+ p/ -	1202,92004	+203,33001	32,290	
8	- p/ +	1373,90002	-170,97998	32,350	
9	+ p/ -	1577,23999	+203,33997	32,360	
10	- p/ +	1748,06006	-170,82007	32,520	
11	+ p/ -	1951,45007	+203,39001	32,570	
12	- p/ +	2122,14990	-170,69983	32,690	
13	+ p/ -	2325,15991	+203,01001	32,310	
14	- p/ +	2495,91992	-170,76001	32,250	

$$\Delta t_m = 32,3448 \quad \overline{\sigma_{n-1}} = 0,2099$$

Cálculos: 1) do azimuth giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 1108,1346'' = 18'28,1345'' = 18'28,13''$$

$$N = N' + \Delta N = 250^{\circ} 24' 01,13''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 109^{\circ} 35' 58,80''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 13,90''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 0,65 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste; atenuação visual do lado + a partir da 6ª passagem.

## SECL5.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 06/10/93  $I_m$  :  $182^{\circ}22'32,50''$   $N'$  :  $250^{\circ}05'29,00''$   $c$  : 3,03186 "/s

Hora do início: 15h 42min 14s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	88,98000			$a+ = 11,2$
2	- p/ +	258,03998	-169,05998		$a- = 8,2$
3	+ p/ -	463,18997	+205,14999	36,090	$a_m = \overline{9,7}$
4	- p/ +	632,03003	-168,84006	36,310	
5	+ p/ -	837,67004	+205,64001	37,000	
6	- p/ +	1006,17999	-168,50995	37,130	
7	+ p/ -	1211,43994	+205,25995	36,750	
8	- p/ +	1380,32995	-168,89001	36,370	
9	+ p/ -	1585,58996	+205,26001	36,370	
10	- p/ +	1753,98999	-168,40003	36,860	
11	+ p/ -	1959,79993	+205,80994	37,410	
12	- p/ +	2128,42017	-168,62024	37,190	

$$\Delta t_m = 36,6989 \quad \sigma_{n-1} \quad 0,4400$$

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 1079,2792'' = 17'59,2791'' = 17'59,28''$$

$$N = N' + \Delta N = 250^{\circ} 23' 28,20''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 109^{\circ} 36' 31,70''$$

$$A_z = \beta + I_m = 291^{\circ} 59' 04,22''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 1,20 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste; atenuação visual do lado + a partir da 6ª passagem.

## SEC16.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 07/10/93     $L_m : 55^{\circ}54'26,75''$      $N' : 123^{\circ}39'51,00''$      $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 16h 22min 10s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}$ (s)	$\Delta t_i$ (s)	amplitude
1	+ p/ -	85,19000			$a+ = 11,2$
2	- p/ +	257,04999	-171,85999		$a- = 8,8$
3	+ p/ -	459,28998	+202,23999	30,380	$a_m = 10,0$
4	- p/ +	631,41999	-172,13001	30,110	
5	+ p/ -	833,27997	+201,85998	29,730	
6	- p/ +	1005,47003	-172,19006	29,670	
7	+ p/ -	1207,32007	+201,85004	29,660	
8	- p/ +	1379,45007	-172,13000	29,840	
9	+ p/ -	1581,42004	+201,96997	30,230	
10	- p/ +	1753,17004	-171,75000	30,220	

$$\Delta t_m = 30,0422 \quad \sigma_{n-1} = 0,3272$$

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 910,8313812'' = 15'10,8314'' = 15'10,83''$$

$$N = N' + \Delta N = 123^{\circ} 55' 01,83''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 236^{\circ} 04' 58,17''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 59' 24,90''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 1,09 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC17.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 13/10/93       $L_m : 55^{\circ}54'25,75''$        $N' : 123^{\circ}39'52,00''$        $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 10h 13min 25s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui} \text{ (s)}$	$\Delta t_i \text{ (s)}$	amplitude
1	+ p/ -	75,84999			$a+ = 9,5$
2	- p/ +	261,27999	-185,43000		$a- = 9,2$
3	+ p/ -	450,10998	+188,83000	3,400	
4	- p/ +	635,48990	-185,38000	3,450	$a_m = 9,35$
5	+ p/ -	824,09997	+188,61000	3,230	
6	- p/ +	1009,52997	-185,43000	3,180	
7	+ p/ -	1197,97998	+188,45000	3,020	
8	- p/ +	1383,40991	-185,42993	3,020	
9	+ p/ -	1571,63989	+188,22990	2,800	
10	- p/ +	1757,22998	-185,59009	2,640	
11	+ p/ -	1945,72998	+188,50000	2,910	
12	- p/ +	2131,10986	-185,37988	3,120	
13	+ p/ -	2319,33984	+188,22998	2,850	
14	- p/ +	2504,97998	-185,64014	2,590	
15	+ p/ -	2693,70996	+188,72996	3,090	
16	- p/ +	2878,91992	-185,20996	3,520	

$$\Delta t_m = 3,0586 \quad \sigma_{n-1} = 0,2858$$

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 86,7048'' = 1' 26,7048'' = 1' 26,70''$$

$$N = N' + \Delta N = 123^{\circ} 55' 18,70''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 236^{\circ} 04' 41,30''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 59' 07,05''$$

2) do desvio percentual do tempo em relação à média:

$$d_t = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 9,34 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC18.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 13/10/93       $L_m : 55^{\circ}54'26,75''$        $N' : 123^{\circ}53'45,00''$        $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 14h 08min 18s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	70,25000			$a+ = 9,9$
2	- p/ +	255,73001	-185,48001		$a- = 9,5$
3	+ p/ -	444,51001	+188,78000	3,300	$a_m = \overline{9,7}$
4	- p/ +	629,88000	-185,36999	3,410	
5	+ p/ -	818,33001	+188,45001	3,080	
6	- p/ +	1003,98004	-185,65003	2,800	
7	+ p/ -	1192,47998	+188,49994	2,850	
8	- p/ +	1377,80005	-185,32007	3,180	
9	+ p/ -	1566,53003	+188,72998	3,410	
10	- p/ +	1752,01001	-185,47998	3,250	
11	+ p/ -	1940,29004	+188,28003	2,800	
12	- p/ +	2125,71991	-185,42993	2,850	
13	+ p/ -	2314,14012	+188,42021	2,990	
14	- p/ +	2499,60010	-185,45998	2,960	
15	+ p/ -	2688,20996	+188,60986	3,150	
16	- p/ +	2873,86017	-185,65021	2,960	

$$\Delta t_m = 3,0901 \quad \overline{\sigma_{n-1}} = 0,2088$$

Cálculos: 1) do azimuth giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 90,315168'' = 1' 30,3152'' = 1' 30,31''$$

$$N = N' + \Delta N = 123^{\circ} 55' 15,30''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 236^{\circ} 04' 44,69''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 59' 11,40''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_{\%} = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 6,57 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC19.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 13/10/93       $L_m$  :  $55^{\circ}54'26,75''$        $N'$  :  $123^{\circ}53'29,00''$        $c$  :  $3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 15h 10min 29s

i	sinai	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	68,09999			$a+ = 9,9$
2	- p/ +	253,86001	-185,76002		$a- = 9,8$
3	+ p/ -	442,42001	+188,56000	2,800	
4	- p/ +	628,11995	-185,69954	2,860	$a_m = 9,85$
5	+ p/ -	816,29999	+188,18044	2,481	
6	- p/ +	1002,32996	-186,02997	2,150	
7	+ p/ -	1190,51001	+188,18005	2,150	
8	- p/ +	1376,26001	-185,75000	2,430	
9	+ p/ -	1564,92993	+188,66992	2,920	
10	- p/ +	1750,46997	-185,54004	3,130	
11	+ p/ -	1938,91992	+188,44995	2,910	
12	- p/ +	2124,67993	-185,76001	2,690	
13	+ p/ -	2313,02000	+188,34007	2,580	
14	- p/ +	2498,78003	-185,76003	2,960	
15	+ p/ -	2687,01001	+188,22998	2,470	
16	- p/ +	2872,70996	-185,69986	2,530	
17	+ p/ -	3060,93994	+188,22998	2,530	
18	- p/ +	3246,85986	-185,91992	2,310	

$$\Delta t_m = 2,6188 \overline{\sigma_{n-1}} = 0,2919$$

Cálculos: 1) cálculo do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 78,2074'' = 1' 18,2073'' = 1' 18,21''$$

$$N = N' + \Delta N = 123^{\circ} 54' 47,25''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 236^{\circ} 05' 12,79''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 59' 39,50''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_s = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 11,14 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC20.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 14/10/93       $L_m$  :  $55^{\circ}54'26,75''$        $N'$  :  $123^{\circ}53'29,00''$        $c$  :  $3,03186''/s$

Hora do início: 15h 40min 00s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	72,39000			$a+ = 11,8$
2	- p/ +	230,74000	-158,35000		$a- = 7,2$
3	+ p/ -	446,04999	+215,30999	56,960	$a_m = \frac{\quad}{9,5}$
4	- p/ +	604,84003	-158,79004	56,520	
5	+ p/ -	819,92999	+215,08996	56,230	
6	- p/ +	984,97998	-165,04999	50,039	
7	+ p/ -	1187,64990	+202,66992	37,620	
8	- p/ +	1358,85998	-171,21008	37,620	
9	+ p/ -	1561,63989	+202,77991	31,570	
10	- p/ +	1732,78992	-171,15003	31,630	
11	+ p/ -	1935,35998	+202,57006	31,000	
12	- p/ +	2106,78003	-171,42005	31,150	
13	+ p/ -	2309,51001	+202,72998	31,310	
14	- p/ +	2473,94995	-164,43999	38,190*	
15	+ p/ -	2689,47998	+215,53003	51,090	
16	- p/ +	2848,05004	-158,57006	56,960	
17	+ p/ -	3063,35986	+215,30982	56,740	
18	- p/ +	3221,65991	-158,30005	57,010	

$$\Delta t_m = \frac{55,202}{33,773}$$

$$\begin{aligned} \text{Cálculos: } \Delta N &= c \cdot a \cdot \Delta t_m = 1589,97651'' = 26' 29,9765'' = 26' 29,97'' \\ &= 972,772736'' = 16' 12,7727'' = 16' 12,77'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= N' + \Delta N = 251^{\circ} 00' 02,98'' \\ &= 250^{\circ} 49' 45,70'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= 360^{\circ} - N = 108^{\circ} 59' 57,00'' \\ &= 109^{\circ} 10' 14,20'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_z &= \beta + L_m = 291^{\circ} 59' 23,20'' \\ &= 292^{\circ} 09' 40,45'' \end{aligned}$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste; série muito longa o que torna insuportável a coleta de dados; \* nesta série observam-se dois comportamentos diferentes; série rejeitada.

## SEC21.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 20/10/93       $L_m$  : 00°00'12,00"       $N'$  : 67°57'08,50"       $c$  : 3,03186 "/s

Hora do início: 8h 51min 50s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}$ (s)	$\Delta t_i$ (s)	amplitude
1	+ p/ -	73,10000			$a+ = 11,9$
2	- p/ +	256,50000	-183,40000		$a- = 11,1$
3	+ p/ -	447,52999	+191,03000	7,630	$a_m = \overline{11,5}$
4	- p/ +	630,54004	-183,01005	8,020	
5	+ p/ -	821,63005	+191,09001	8,080	
6	- p/ +	1004,91003	-183,27998	7,750	
7	+ p/ -	1195,94006	+191,03003	7,960	
8	- p/ +	1379,01001	-183,06995	7,630	
9	+ p/ -	1569,71001	+190,70000	7,630	
10	- p/ +	1753,33008	-183,62007	7,080	
11	+ p/ -	1944,14001	+190,80993	7,190	
12	- p/ +	2127,58984	-183,44983	7,360	

$$\Delta t_m = 7,6330 \quad \overline{\sigma_{n-1}} = 0,3410$$

Cálculos: 1) cálculo do azimuth giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 265,9143344'' = 4' 25,9143'' = 4' 25,91''$$

$$N = N' + \Delta N = 68^\circ 01' 34,41''$$

$$\beta = 360^\circ - N = 291^\circ 58' 25,50''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^\circ 58' 26,70''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_s = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 4,47 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;



## SEC22.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 20/10/93     $L_m$  : 20°00'05,25"     $N'$  : 87°58'12,00"     $c$  : 3,03186 "/s

Hora do início: 9h 55min 43s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	76,50999			$a+ = 11,5$
2	- p/ +	260,95001	-184,44002		$a- = 11,0$
3	+ p/ -	450,83002	+189,88000	5,440	$a_m = \overline{11,25}$
4	- p/ +	635,16003	-184,33001	5,550	
5	+ p/ -	824,65002	+189,48999	5,160	
6	- p/ +	1009,09003	-184,44001	5,050	
7	+ p/ -	1198,69995	+189,60992	5,170	
8	- p/ +	1383,13989	-184,43994	5,170	
9	+ p/ -	1572,67993	+189,54004	5,100	
10	- p/ +	1757,28991	-184,60998	4,930	
11	+ p/ -	1946,88989	+189,59998	4,990	
12	- p/ +	2131,21997	-184,33008	5,270	
13	+ p/ -	2320,71997	+189,50000	5,170	
14	- p/ +	2505,15991	-184,43994	5,060	

$$\Delta t_m = 5,1716 \quad \overline{\sigma_{n-1}} = 0,1781$$

Cálculos: 1) do azimuth giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 176,3951307'' = 2' 56,3951'' = 2' 56,39''$$

$$N = N' + \Delta N = 88^\circ 01' 08,39''$$

$$\beta = 360^\circ - N = 271^\circ 58' 51,60''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^\circ 58' 56,80''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_s = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 3,44 \%$$

Obs: azimuth contado do Norte por Leste;

## SEC23.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 20/10/93       $L_m : 40^{\circ}00'03,25''$        $N' : 107^{\circ}57'45,00''$        $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 9h 55min 43s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	18,12000			$a+ = 10,2$
2	- p/ +	201,73999	-183,61999		$a- = 9,8$
3	+ p/ -	392,11001	+190,37002	6,750	$a_m = \overline{10,0}$
4	- p/ +	575,89001	-183,78002	6,590	
5	+ p/ -	766,48004	+190,59003	6,810	
6	- p/ +	950,10004	-183,62000	6,970	
7	+ p/ -	1140,52990	+190,42986	6,810	
8	- p/ +	1324,25000	-183,72001	6,710	
9	+ p/ -	1514,45996	+190,20996	6,490	
10	- p/ +	1698,28992	-183,82996	6,380	
11	+ p/ -	1888,77991	+190,48999	6,660	
12	- p/ +	2072,22998	-183,45007	7,040	

$$\Delta t_m = 6,7213 \quad \sigma_{n-1} = 0,2030$$

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 203,780462'' = 3' 23,7804'' = 3' 23,78''$$

$$N = N' + \Delta N = 108^{\circ} 01' 8,78''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 251^{\circ} 58' 51,20''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 54,40''$$

2) do desvio médio dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_s = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 3,92 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC24.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 21/10/93       $L_m$  :  $60^{\circ}00'22,00''$        $N'$  :  $127^{\circ}57'50,00''$        $c$  : 3,03186 "/s

Hora do início: 10h 43min 09s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	40,09000			$a+ = 8,2$
2	- p/ +	223,20999	-183,11999		$a- = 7,8$
3	+ p/ -	414,51999	+191,31000	8,190	$a_m = \overline{8,0}$
4	- p/ +	597,03998	-182,51999	8,790	
5	+ p/ -	788,45001	+191,41003	8,890	
6	- p/ +	971,19000	-182,73999	8,670	
7	+ p/ -	1162,55005	+191,36005	8,620	
8	- p/ +	1345,29004	-182,73999	8,620	
9	+ p/ -	1537,03003	+191,73999	9,000	
10	- p/ +	1719,39001	-182,35998	9,380	

$$\Delta t_m = 8,7767 \quad \overline{\sigma_{n-1}} = 0,3446$$

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 212,87699968'' = 3' 32,8769'' = 3' 32,88''$$

$$N = N' + \Delta N = 128^{\circ} 01' 30,38''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 231^{\circ} 58' 29,60''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 51,60''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_s = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 3,92 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC25.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 21/10/93       $L_m : 80^{\circ}00'16,50''$        $N' : 147^{\circ}57'35,00''$        $c : 3,03186 \text{ "/s}$

Hora do início: 11h 30min 05s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	66,62000			$a+ = 9,0$
2	- p/ +	249,31001	-182,69001		$a- = 8,2$
3	+ p/ -	440,78003	+194,47002	11,780	
4	- p/ +	623,17999	-182,39996	12,070	$a_m = 8,6$
5	+ p/ -	814,16003	+190,98004	8,580	
6	- p/ +	997,01000	-182,84997	8,130	
7	+ p/ -	1188,58996	+191,57996	8,730	
8	- p/ +	1371,16003	-182,27007	9,310	
9	+ p/ -	1562,41003	+191,25000	8,980	
10	- p/ +	1744,82007	-182,41004	8,840	
11	+ p/ -	1936,88989	+191,57993	9,170	
12	- p/ +	2119,07983	-182,26983	9,310	
13	+ p/ -	2309,88989	+190,81006	8,540	

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira:

\*incluindo-se as duas primeiras leituras,  $\Delta t_m = 9,49$      $\sigma_{n-1} = 1,3357$

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 247,442222'' = 4' 7,4422'' = 4' 7,44''$$

$$N = N' + \Delta N = 148^{\circ} 01' 42,44''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 211^{\circ} 58' 17,50''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 34,00''$$

\*excluindo-se as duas primeiras leituras,  $\Delta t_m = 8,8812$      $\sigma_{n-1} = 0,4036$

$$\Delta N = 231,569677'' = 3' 51,5696'' = 4' 51,57''$$

$$N = N' + \Delta N = 148^{\circ} 01' 26,57''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 211^{\circ} 58' 33,40''$$

$$A_z = 291^{\circ} 58' 04,99''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_s = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 14,05 \% \text{ no } 1^{\circ} \text{ caso e } 4,54 \% \text{ no } 2^{\circ} \text{ caso}$$

obs: azimutes contado do Norte por leste;

## SEC26.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 21/10/93     $L_m : 100^{\circ}00'11,20''$      $N' : 167^{\circ}57'23,50''$      $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 14h 4min 11s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	45,59000			$a+ = 9,0$
2	- p/ +	228,88000	-183,29000		$a- = 8,2$
3	+ p/ -	419,47000	+191,47000	9,180	$a_m = \overline{8,6}$
4	- p/ +	603,02997	-183,55997	7,910	
5	+ p/ -	793,39996	+190,36999	6,810	
6	- p/ +	997,17999	-183,78003	6,590	
7	+ p/ -	1167,55005	+190,37006	6,590	
8	- p/ +	1350,95007	-183,40002	6,970	
9	+ p/ -	1541,76001	+190,80994	7,410	
10	- p/ +	1725,16003	-183,40002	7,410	
11	+ p/ -	1915,53003	+190,37000	6,970	
12	- p/ +	2099,25000	-183,71997	6,650	

$$\Delta t_m = 7,3222 \quad \sigma_{n-1} = 0,8147$$

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 190,91959'' = 3' 10,9195'' = 3' 10,91'''$$

$$N = N' + \Delta N = 168^{\circ} 00' 34,41''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 191^{\circ} 59' 25,50''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 59' 36,70''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_s = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 11,12 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC27.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 22/10/93       $L_m : 120^{\circ}00'07,50''$        $N' : 187^{\circ}57'21,00''$        $c : 3,03186 \text{ "/s}$

Hora do início: 8h 39min 8s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	51,08000			$a+ = 12,1$
2	- p/ +	235,18999	-184,10999		$a- = 11,4$
3	+ p/ -	425,45001	+190,26002	6,150	$a_m = \overline{11,75}$
4	- p/ +	609,57001	-184,12000	6,140	
5	+ p/ -	800,20996	+190,63995	6,520	
6	- p/ +	984,20996	-184,00000	6,640	
7	+ p/ -	1174,91003	+190,70007	6,700	
8	- p/ +	1358,91003	-184,00000	6,700	
9	+ p/ -	1549,45007	+190,54004	6,540	
10	- p/ +	1733,34009	-183,89002	6,650	
11	+ p/ -	1923,44006	+190,09997	6,310	
12	- p/ +	2107,16016	-183,72010	6,380	
			$\Delta t_m =$	$\overline{6,4477}$	

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 229,6951537'' = 3' 49,6951'' = 3' 49,69'''$$

$$N = N' + \Delta N = 188^{\circ} 01' 10,70''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 171^{\circ} 58' 49,30''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 56,80''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_s = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 3,30 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC28.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 22/10/93       $L_m : 139^{\circ}59'59,99''$        $N' : 207^{\circ}57'33,00''$        $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 9h 32min 27s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui} \text{ (s)}$	$\Delta t_i \text{ (s)}$	amplitude
1	+ p/ -	53,88000			$a+ = 10,2$
2	- p/ +	236,95001	-183,07000		$a- = 9,8$
3	+ p/ -	426,44000	+189,48999	6,420	$a_m = \overline{10,0}$
4	- p/ +	609,72998	-183,28998	6,200	
5	+ p/ -	799,27997	+189,54999	6,260	
6	- p/ +	982,28998	-183,01000	6,540	
7	+ p/ -	1171,84010	+189,55012	6,540	
8	- p/ +	1354,69006	-182,84996	6,700	
9	+ p/ -	1544,07007	+189,38001	6,530	
10	- p/ +	1726,85998	-182,78991	6,590	
11	+ p/ -	1916,13000	+189,27002	7,000	
12	- p/ +	2099,26001	-183,13001	6,140	

$$\Delta t_m = 6,5251 \overline{\sigma_{n-1}} = 0,2473$$

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 197,8318969'' = 3' 17,31896'' = 3' 17,32''$$

$$N = N' + \Delta N = 208^{\circ} 00' 50,32''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 151^{\circ} 59' 09,68''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 59' 09,67''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_s = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 3,78 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC29.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 22/10/93       $L_m : 160^{\circ}00'04,25''$        $N' : 227^{\circ}57'07,50''$        $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 11h 18min 27s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	38,78000			$a+ = 8,5$
2	- p/ +	220,64000	-181,86000		$a- = 7,9$
3	+ p/ -	410,67999	+190,00400	8,180	$a_m = \overline{8,2}$
4	- p/ +	592,76001	-182,08002	7,960	
5	+ p/ -	782,69000	+189,92999	7,850	
6	- p/ +	965,10004	-183,00000	6,930	
7	+ p/ -	1154,86999	+189,17999	6,180	
8	- p/ +	1337,00000	-182,13001	7,050	

$$\Delta t_m = \overline{7,3583}$$

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 182,936506'' = 3' 2,9365'' = 3' 02,94''$$

$$N = N' + \Delta N = 228^{\circ} 00' 10,44''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 131^{\circ} 59' 49,50''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 59' 53,80''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_s = \frac{\sigma_n - 1}{\Delta t_m} \times 100 \% = 10,43 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;



## SEC30.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 25/10/93       $L_m : 180^{\circ}00'05,00''$        $N' : 247^{\circ}57'50,50''$        $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 9h 36min 18s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	73,11000			$a+ = 9,8$
2	- p/ +	256,78000	-183,67000		$a- = 9,1$
3	+ p/ -	447,14999	+190,36999	6,670	$a_m = \overline{9,45}$
4	- p/ +	630,49000	-183,34001	7,030	
5	+ p/ -	821,35998	+190,86998	7,530	
6	- p/ +	1004,53003	-183,17005	7,700	
7	+ p/ -	1195,40002	+190,86999	7,700	
8	- p/ +	1378,79003	-183,39001	7,480	
9	+ p/ -	1569,06006	+190,27003	6,880	
10	- p/ +	1752,89001	-183,82995	6,440	
11	+ p/ -	1943,31994	+190,42993	6,600	
12	- p/ +	2126,65991	-183,33997	7,090	

$$\Delta t_m = 7,1122 \quad \sigma_{n-1} = 0,46806$$

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 203,7736224'' = 3' 27,7736'' = 3' 27,78''$$

$$N = N' + \Delta N = 248^{\circ} 01' 18,27''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 111^{\circ} 58' 41,70''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 46,70''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 6,58 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC31.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 25/10/93       $L_m : 200^{\circ}00'18,50''$        $N' : 267^{\circ}57'40,00''$        $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 10h 34min 36s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui} (s)$	$\Delta t_i (s)$	amplitude
1	+ p/ -	47,56000			$a+ = 8,8$
2	- p/ +	230,41000	-182,85000		$a- = 9,0$
3	+ p/ -	421,82999	+194,41999	11,570	$a_m = \overline{8,4}$
4	- p/ +	604,12006	-182,29007	12,130	
5	+ p/ -	795,65002	+191,52996	9,239	
6	- p/ +	978,44000	-182,78998	8,740	
7	+ p/ -	1169,64001	+191,20001	8,410	
8	- p/ +	1352,31994	-182,67993	8,520	
			$\Delta t_m = 9,7681$	$\overline{\sigma_{n-1}} = 1,6470$	

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 248,7719958'' = 4' 8,7720'' = 4' 8,77''$$

$$N = N' + \Delta N = 268^{\circ} 01' 48,77''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 91^{\circ} 58' 11,23''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 29,70''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 15,96 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC32.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 25/10/93       $L_m : 220^{\circ}00'00,00''$        $N' : 287^{\circ}57'14,00''$        $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 11h 33min 41s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	67,55999			$a+ = 10,2$
2	- p/ +	250,41002	-182,85003		$a- = 9,4$
3	+ p/ -	441,38998	+190,97996	8,139	$a_m = \overline{\quad}$
4	- p/ +	624,17992	-182,78994	8,190	
5	+ p/ -	814,92992	+190,75000	7,960	
6	- p/ +	997,66998	-182,74006	8,010	
7	+ p/ -	1188,76001	+191,09003	8,350	
8	- p/ +	1371,59997	-182,83996	8,250	
9	+ p/ -	1562,19995	+190,59998	7,760	
10	- p/ +	1745,31994	-183,11999	7,480	
11	+ p/ -	1936,29004	+190,97010	7,850	
12	- p/ +	2118,86987	-182,27983	8,690	

$$\Delta t_m = 8,0679 \quad \sigma_{n-1} = 0,3371$$

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 239,7152853'' = 3' 59,7153'' = 3' 59,71''$$

$$N = N' + \Delta N = 288^{\circ} 01' 13,72''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 71^{\circ} 58' 46,28''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 46,28''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 4,18 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC33.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 26/10/93       $L_m : 240^{\circ}00'03,50''$        $N' : 307^{\circ}57'23,50''$        $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 11h 17min 9s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	69,21000			$a+ = 8,9$
2	- p/ +	251,83000	-182,62000		$a- = 8,2$
3	+ p/ -	450,50000	+198,67002	16,050	
4	- p/ +	626,15002	-175,65002	23,020	$a_m = 8,52$
5	+ p/ -	817,46002	+191,31000	15,660	
6	- p/ +	999,86000	-182,39998	8,910	
7	+ p/ -	1191,43994	+191,57994	9,180	
8	- p/ +	1347,12998	-182,69004	8,890	
9	+ p/ -	1565,48990	+191,35992	8,679	
10	- p/ +	1747,88989	-182,39999	8,960	
11	+ p/ -	1946,50000	+198,61011	16,210	
12	- p/ +	2115,23990	-168,73990	29,870	
13	+ p/ -	2320,21997	+204,97998	36,240	
14	- p/ +	2488,94995	-168,72998	36,250	
15	+ p/ -	2694,58984	+205,63989	36,909	
				$\Delta t_m =$	8,1067

obs: Azimute contado do Norte por Leste; eliminada devido à discrepância nos tempos

## SEC34.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 27/10/93  $I_m : 260^{\circ}00'02,50''$   $N' : 327^{\circ}57'47,00''$   $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 9h 58min 28s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	76,78999			$a+ = 8,4$
2	- p/ +	260,51001	-183,72002		$a- = 7,9$
3	+ p/ -	451,76001	+191,25000	7,530	$a_m = \overline{8,15}$
4	- p/ +	634,44000	-182,67999	8,570	
5	+ p/ -	825,53003	+191,09003	8,410	
6	- p/ +	1008,76001	-183,22998	7,860	
7	+ p/ -	1200,01001	+191,25000	8,020	
8	- p/ +	1382,90991	-182,89990	8,350	
9	+ p/ -	1574,21997	+191,31006	8,410	
10	- p/ +	1757,01001	-182,79004	8,520	
11	+ p/ -	1948,03991	+191,02990	8,509	
12	- p/ +	2130,89014	-182,85023	8,449	

$$\Delta t_m = 8,2628 \quad \sigma_{n-1} = 0,3440$$

Cálculos: 1) cálculo do azimuth giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 204,17097'' = 3' 24,1709'' = 3' 24,17''$$

$$N = N' + \Delta N = 328^{\circ} 01' 12,60''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 31^{\circ} 58' 47,40''$$

$$A_z = \beta + I_m = 291^{\circ} 58' 49,90''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 4,16 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SECC35.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 27/10/93       $L_m : 280^{\circ}00'05,00''$        $N' : 347^{\circ}57'34,50''$        $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 11h 22min 54s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui} (s)$	$\Delta t_i (s)$	amplitude
1	+ p/ -	74,20000			$a+ = 9,6$
2	- p/ +	257,38004	-183,18004		$a- = 9,0$
3	+ p/ -	448,19002	+190,80998	7,630	$a_m = \overline{9,3}$
4	- p/ +	631,37006	-183,18004	7,630	
5	+ p/ -	822,12006	+190,75000	7,570	
6	- p/ +	1005,19002	-183,06996	7,680	
7	+ p/ -	1196,32996	+191,13994	8,329	
8	- p/ +	1378,95996	-182,63000	8,769	
9	+ p/ -	1570,36999	+191,41003	8,780	
10	- p/ +	1753,04992	-182,27993	9,130	
11	+ p/ -	1943,97998	+190,93066	8,650	
12	- p/ +	2126,93017	-182,95019	8,430	

$$\Delta t_m = 8,2598 \quad \sigma_{n-1} = 0,5848$$

Cálculos: 1) do azimuth giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 233,7421838'' = 3' 53,7421'' = 3' 53,74''$$

$$N = N' + \Delta N = 348^{\circ} 01' 28,24''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 11^{\circ} 58' 31,75''$$

$$A_z = \beta + L_m = 291^{\circ} 58' 36,70''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 7,08 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## SEC36.DAT- Método das Passagens com cronógrafo

Data : 27/10/93       $L_m : 299^{\circ}59'59,40''$        $N' : 7^{\circ}57'43,00''$        $c : 3,03186 \text{ ''/s}$

Hora do início: 17h 18min 20s

i	sinal	t (s)	$\Delta t_{ui}(s)$	$\Delta t_i(s)$	amplitude
1	+ p/ -	73,82000			$a+ = 9,8$
2	- p/ +	257,28000	-183,46000		$a- = 9,2$
3	+ p/ -	447,48001	+190,20001	6,740	$a_m = \overline{\quad}$
4	- p/ +	631,42999	-183,94998	6,250	
5	+ p/ -	821,80000	+190,37001	6,420	
6	- p/ +	1005,35998	-183,55998	6,810	
7	+ p/ -	1195,90002	+190,54004	6,980	
8	- p/ +	1379,68005	-183,78003	6,760	
9	+ p/ -	1569,66003	+189,97995	6,200	
10	- p/ +	1753,56005	-183,90005	6.080	

$$\Delta t_m = \overline{6,5300} \quad \sigma_{n-1} = 0,3338$$

Cálculos: 1) do azimute giroscópico da mira:

$$\Delta N = c \cdot a \cdot \Delta t_m = 188,0814353'' = 3' \ 8,0814'' = 3' \ 8,08''$$

$$N = N' + \Delta N = 8^{\circ} \ 00' \ 51,08''$$

$$\beta = 360^{\circ} - N = 351^{\circ} \ 59' \ 08,32''$$

$$A_z = \beta + L_m = 651^{\circ} \ 59' \ 8,32 - 360^{\circ} = 291^{\circ} \ 59' \ 08,32''$$

2) do desvio percentual dos  $\Delta t_m$  em relação à média:

$$d_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\Delta t_m} \times 100 \% = 5,11 \%$$

obs: Azimute contado do Norte por Leste;

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALONSO, M. & FINN, E.J., 1972. Física: um curso universitário. São Paulo, Edgar Blucher, v.1. 481 p.
- BEER, F.P. & JOHNSTON, E.R., 1977. Mecânica vetorial para engenheiros: dinâmica. São Paulo, McGraw-Hill, v.2. 680 p.
- BERQUÓ, J.E., 1980. O giroscópio e suas aplicações em Aeronáutica. São Paulo, Ministério da Aeronáutica, 2 ed., 56p.
- BLAIS, J.A.R., 1977. Inertia, inertial reference systems and physical geodesy. Collected Papers Geodetic Survey: 55-78.
- BRIGHAM, E.O., 1974. The fast Fourier transform. New Jersey, Prentice-Hall. p.1-163.
- BUTKOV, E., 1978. Física matemática. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 725 p.
- CHENG, D., 1959. Analysis of linear systems. London, Addison-Wesley, 431 p.
- CHRZANOWSKI, A., 1969. An accuracy analysis of mine orientation. Proceedings of the Third South African National Survey Conference, Joannesburg.
- CONTE, S. & BOOR, C., 1988. Elementary numerical analysis., Singapore, McGraw-Hill, 432p.
- COOLEY, J.W. & TUKEY, J.W., 1965. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. Mathematics of computation. 90(19): pp.297-301.
- DEDEOGLU, S.M., 1975. Evaluatin of the turning points of gyroscopic oscillations. Manuscripta Geodaetica, 3(2): 195-211
- DEIMEL, R.F., 1950. Mechanics of the gyroscope. 2 ed. Londres, Dover Inc, 192 p.
- . 1965. El Wild GAK1- acessório giroscópico para la determinacion del Norte geográfico. VII Asamblea General del Instituto Panamericano de Geografia e História da Guatemala.
- EMR, 1975. Standing operation procedure, azimuth determination, WILD GAK1. Girotheodolite Surveys and Mapping Branch International Report. Canada



- FREITAS, S.R.C., 1980. Posicionadores inerciais. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. 170p.
- FREITAS, S.R.C., et alii, 1991. Correlation between earth gravity tides and seismic activity at Joao Camara, Brazil. Cahiers du Centre Européen de Géodynamique et de Séismologie, v.4, p.363-378.
- GOLDEMBERG, J., 1968. Física geral e experimental. São Paulo, Editora da USP, v.1, 418 p.
- GOLDSTEIN, H., 1972. Classical mechanics. 9 ed. Philippines, Addison-Wesley, 385p.
- GOLDSTEIN, H., 1980. Classical mechanics. 2 ed. Philippines, Addison-Wesley, 643 p.
- GRAFAREND, E., 1967. "Fehler theoretische Untersuchungen und chronometrische Messverfahren beim Einsatz von Aufsatzkreisel in Kombination mit dem elektroptischen Entfernungsmessgerät AGA-Geodimeter 4B", DGK, Reihe C, Heft Nr.112, Munchen.
- HALMOS, F., 1977. High precision measurement and evaluation method for azimuth determination with gyrotheodolites. Manuscripta Geodaetica, 3(2):213-231
- HALLIDAY, D. & RESNICK, R., 1992. Fundamentos de física. São Paulo, Livros Tecnicos e Científicos, v.1.
- JENKINS, G.M. & WATTS, D.G., 1968, Spectral analysis and its implications. San Francisco, Holden-Day.
- JEUDY, L.M.A., 1981. Theorie du gyrocompas suspendu. I. Equations du Mouvement. Manuscripta Geodaetica, 75(6): 75-122.
- JEUDY, L.M.A., 1982. Theorie du gyrocompass suspendu. II. Equations du Mouvement. Manuscripta Geodaetica, (7):
- JEUDY, L.M.A. & GAGNON, P. 1982. Spectral analysis as applied to a set of gyrocompass transit times. Bulletin Geodesic, 1(56):40-52
- KREYSIG, E., 1969. Matemática Superior. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 851 p.
- KITTEL, C.L. et al, 1973. Curso de Física de Berkeley. São Paulo, Edgar Blucher. 455p.
- LANDAU, L. & LIFCHITZ, E., 1967. Théorie de l'élasticité. Éditions Mir, Moscou.
- LAUF, G.B., 1963. The gyrotheodolite and its implications in the

mining industry of South Africa. Journal South Africa Institute of Mining and Metallurgy.

MANDELIER, F. & MOUSSET, J., 1973. Le gyrothéodolite et l'orientation des pendules horizontaux. Bruxelles, Ministère de La Defense Nationale. 53p.

MATHWORKS INC, 1990. 386 - MATLAB user's guide. 362 p.

MIKHAIL, E.M., 1976. Observations and least squares. New York, Harpers & Row.

NADAL, C.A., 1982. Determinação das constantes instrumentais do teodolito giroscópico. Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. 75p.

PRESS, W.; FLANNERY, B.; TENKOLSKY, S. & VELLERLING, W., 1989. Numerical Recipes - the art of scientific computing. New York, University Press, 681 p.

RANDALL, R.B., 1987. Frequency analysis. Denmark, K. Larsen & San. 330p.

RIKITAKE, T.; SATO, R.; HAGIWARA, Y., 1987. Applied Mathematics for Earth Scientists. Tokio, D. Reidel Publishing Company, 431 p.

SCHWAB, S.H.S., 1994. Elementos de análise de Fourier. Curitiba, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. 86p.

SCHWATZ, M., 1979. Transmissão de informação, modulação e ruído. Rio de Janeiro, Guanabara Dois, 2 ed. 580p.

SPIEGEL, M.R., 1976. Análise de Fourier. São Paulo, McGraw-Hill. 243p.

STRASSER, G.I. & SCHWENDENER, H.R., 1966. A North-seeking gyro attachment for the theodolite, as a new aid to surveyor. Bulletin Geodesic, 1(79): 23-38.

SCHWENDENER, H.R. & WARD, H.R., 1967. The gyroscope attachment as a convenient for determining azimuth. Proceedings of the Third South African National Survey Conference, Johannesburg.

SYMON, K., 1973. Mechanics. Manila, Addison-Wesley. 627p.

SCHULTZ, P., 1975. Gleichrichtmomente bei nordweisenden Kreiseln kurzer Nordsuchzeit infolge oszillatorischer Störbewegungen. D.G.K. Reihe c, Heft Nr. 205, München.

Sommerfeld, A. & Klein, F., Über die Theorie des Kessels. Leipzig: B.G. Teubner.

VANICEK,P., 1972. Dynamical aspects of the gyrocompass. The Canadian Surveyor, 1(26): 77-83

VANICEK,P., 1986. Multiple transit times and least squares for gyroscopic azimuth. Bulletin Geodesic , 1(60): 288-296

WILD,ca1970. Giroscópio Wild GAK1;instrucciones para el empleo.Heerbrugg, 37p.